PUBLICATIONS SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ D'ALGER

SÉRIE A

MATHÉMATIQUES

JUIN 1957. — Tome IV, N° 1.

EXTRAIT

M. AUDIN

SUR LES ÉQUATIONS LINÉAIRES DANS UN ESPACE VECTORIEL

IMPRIMERIE DURAND CHARTRES — 9, RUE FULBERT

Alger, Mathématiques.
Tome IV, nº 1, 1957.

Maurice AUDIN
Assistant à la Faculté des Sciences d'Alger.

SUR LES ÉQUATIONS LINÉAIRES DANS UN ESPACE VECTORIEL(1)

CHAPITRE PREMIER

QUELQUES PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES

Indice d'une transformation linéaire.

1. 1. Soit E un espace vectoriel sur le corps K qui peut être, soit le corps R des nombres réels, soit le corps C des nombres complexes. Pour toute transformation linéaire T de E dans E, désignons par $\mu(T)$ la dimension du *noyau* $\overset{-1}{T}(0)$ (2), sous-espace de E formé des solutions de l'équation $Tx = 0$, et par $\mu^*(T)$ la codimension de l'*image* T(E) de E. Nous écrirons

$$\mu(T) = \dim \overset{-1}{T}(0), \qquad \mu^*(T) = \operatorname{cod} T(E).$$

Si nous envisageons, avec T, les transformations itérées de T, nous avons :

$$(0) \subset \overset{-1}{T}(0) \subset \overset{-2}{T}(0) \subset \ldots \subset \overset{-n}{T}(0) \subset \ldots$$
$$E \supset T(E) \supset T^2(E) \supset \ldots \supset T^n(E) \supset \ldots$$

et, par conséquent, $\mu(T^n) \geqslant \mu(T)$ et $\mu^*(T^n) \geqslant \mu^*(T)$.

(1) Thèse soutenue le 2 décembre 1957, devant la Faculté des Sciences de Paris, en l'absence du candidat. Voir Note de L. Schwartz à la fin du mémoire.

(2) T étant une application de E dans F, nous désignons par $\overset{-1}{T}$ l'application réciproque de T définie dans l'ensemble des parties de F, et par T^{-1} l'application inverse de T, quand elle existe, définie dans F.

Nous appellerons *indice de* T la différence $\chi(T) = \mu(T) - \mu^*(T)$, déterminée (quoique finie ou infinie) sauf si $\mu(T) = \infty$ et $\mu^*(T) = \infty$ en même temps.

Propriété logarithmique.

1. 2. L'indice $\chi(T)$ jouit d'une propriété logarithmique importante, dont nous aurons souvent besoin, que F.V. Atkinson ([1] et [2]) a étudiée dans des cas particuliers :

THÉORÈME. — *Soient* A *et* B *deux transformations linéaires de l'espace vectoriel* E *dans lui-même; on a:*

$$\chi(AB) = \chi(A) + \chi(B)$$

lorsque l'un au moins des indices $\chi(A)$ *et* $\chi(B)$ *est fini.*

Supposons d'abord $\chi(A)$ et $\chi(B)$ finis. Alors $\mu(AB)$ est la dimension du sous-espace $\overset{-1}{B}\left[\overset{-1}{A}(0)\right]$, et l'on a :

$$(1) \qquad \mu(AB) = \mu(B) + \dim\left[\overset{-1}{A}(0) \cap B(E)\right].$$

De même $\mu^*(AB)$ est la codimension du sous-espace $A[B(E)]$, c'est-à-dire la codimension de $A[B(E)]$ dans $A(E)$, augmentée de la codimension de $A(E)$ dans E. La première est égale à la codimension de $B(E) \oplus \overset{-1}{A}(0)$, image réciproque de $A[B(E)]$ par A; c'est donc que :

$$(2) \quad \mu^*(AB) = \mu^*(A) + \mu^*(B) - \mu(A) + \dim\left[\overset{-1}{A}(0) \cap B(E)\right].$$

De (1) et (2), on tire :

$$\chi(AB) = \mu(AB) - \mu^*(AB) = \mu(B) - \mu^*(A) - \mu^*(B) + \mu(A) = \chi(A) + \chi(B).$$

Dire que l'un des indices $\chi(A)$ et $\chi(B)$ est infini, d'un signe quelconque, revient à dire que l'un des symboles $\mu(A)$, $\mu^*(A)$, $\mu(B)$, $\mu^*(B)$ a une valeur infinie, les trois autres étant finis; (1) et (2) montrent qu'alors un et un seul des nombres $\mu(AB)$ et $\mu^*(AB)$ est infini, et l'égalité précédente a encore un sens.

1. 3. Le théorème précédent s'applique en particulier aux indices de T et d'une quelconque de ses itérées, T^n. L'égalité $\chi(T^n) = n\,\chi(T)$ est encore vraie lorsque $\chi(T)$ est infini, ou même indéterminé, en lui donnant alors le sens que $\chi(T^n)$ est indéterminé aussi.

Pour cela, nous avons déjà $\mu(T^n) \geqslant \mu(T)$. Pour affirmer que

$\mu(T)$ et $\mu(T^n)$ sont finis ou infinis simultanément, démontrons le lemme suivant :

LEMME. — *Quel que soit l'entier positif n, on a*

$$\mu(T^n) \leqslant n \quad \mu(T) \qquad \text{et} \qquad \mu^*(T^n) \leqslant n \quad \mu^*(T).$$

Le cas $\mu(T) = \infty$ est trivial. Supposons $\mu(T)$ fini. Pour chaque n, appelons M_n un supplémentaire quelconque de $\overset{-n+1}{T}(o)$ dans $\overset{-n}{T}(o)$, et montrons que l'on a $\dim M_n \leqslant \mu$, quel que soit n.

Le seul vecteur de M_n appliqué sur o par T^{n-1} est o, et tout vecteur de M_n appartient à $\overset{-n}{T}(o)$, donc possède un transformé par T^{n-1} qui appartient à $\overset{-1}{T}(o)$. Si l'on avait $\dim M_n > \mu$, on pourrait trouver un système libre de $k > \mu$ vecteurs de M_n, soit $\{e_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, et k nombres α_i non tous nuls tels que l'on ait :

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i T^{n-1} e_i = o,$$

les $T^{n-1}e_i$ étant des vecteurs de $\overset{-1}{T}(o)$ en nombre $k > \mu$.

Posons $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$. Nous avons $T^{n-1}x = o$ et $x \neq o$, ce qui est impossible puisque $x \in M_n$. On a donc bien, quel que soit n, $\dim M_n \leqslant \mu$.

Pour démontrer que $\mu^*(T^n) \leqslant n\ \mu^*(T)$, on peut encore supposer que $\mu^*(T)$ est fini. Appelons M_n un supplémentaire de $T^n(E)$ dans $T^{n-1}(E)$, pour $n \geqslant 1$. Il faut montrer que $\dim M_n \leqslant \mu$, ce qui se fera par un raisonnement analogue au précédent.

Nous avons donc :

PROPOSITION. — *Quel que soit l'entier positif n, on a toujours:*

$$\chi(T^n) = n \quad \chi(T),$$

en entendant par là que si l'un des deux membres est indéterminé, l'autre l'est aussi.

Si $\chi(T)$ est fini, ceci est une conséquence du théorème 1. 2.; si $\mu(T)$ est infini, $\mu(T) \leqslant \mu(T^n)$ et $\mu(T^n)$ est infini, donc $\chi(T) = \infty$ implique $\chi(T^n) = \infty = n\ \chi(T)$; de même, lorsque $\chi(T) = -\infty$,

$$\chi(T^n) = -\infty = n \quad \chi(T);$$

enfin, si $\mu(T)$ et $\mu^*(T)$ sont tous deux infinis, il en est de même de $\mu(T^n)$ et de $\mu^*(T^n)$.

Invariance de l'indice.

1.4. THÉORÈME. — *Soit* T *une transformation linéaire de l'espace vectoriel* E *dans lui-même. Quelle que soit la transformation de rang fini* L, *on a:*

$$\chi(T + L) = \chi(T),$$

en entendant par là, si l'un des deux membres est indéterminé, que l'autre l'est aussi.

Au lieu de considérer, en général, une transformation L de rang quelconque, il nous suffit évidemment de prouver notre assertion pour le cas où L est de rang 1, c'est-à-dire : $Lx = x_0^*(x)\,x_0$, $x_0 \in E$, x_0^* étant une forme linéaire sur E.

Appelons H_0 l'hyperplan $\overset{-1}{x_0^*}(0) = \overset{-1}{L}(0)$ et D_0 un supplémentaire de H_0 dans E (donc une droite).

a) si $H_0 \supset \overset{-1}{T}(0)$ et $x_0 \in T(E)$, il existe $x \in H_0$, tel que $-Tx = Lx$; donc, Δ_0 désignant le support de x,

$$\overset{-1}{\overline{(T + L)}}(0) = \overset{-1}{T}(0) \oplus \Delta_0 \qquad \text{ou} \qquad \mu(T + L) = \mu(T) + 1,$$

et $$(T + L)(E) = (T + L)(H_0) \oplus (T + L)(\Delta_0) = T(H_0),$$

donc $$\mu^*(T + L) = \mu^*(T) + \operatorname*{cod}_{T(E)} T(H_0) = \mu^*(T) + 1;$$

on a bien

$$\chi(T + L) = \chi(T);$$

b) si $H_0 \supset \overset{-1}{T}(0)$ et $x_0 \notin T(E)$, alors :

$$\overset{-1}{\overline{(T + L)}}(0) = \overset{-1}{T}(0) \qquad \text{et} \qquad \mu(T + L) = \mu(T),$$

$$(T - L)(E) = T(H_0) \oplus (T + L)(D_0)$$

et $$\mu^*(T + L) = \mu^*(T) + \operatorname*{cod}_{T(E)} T(H_0) - 1 = \mu^*(T);$$

donc $$\chi(T + L) = \chi(T);$$

c) si H_0 ne contient pas $\overset{-1}{T}(0)$, alors :

$$\overset{-1}{\overline{(T + L)}}(0) = \overset{-1}{T}(0) \cap H_0 \qquad \text{donc} \qquad \mu(T + L) = \mu(T) - 1$$

et

$$(T + L)(E) = T(E) \oplus L(E) \qquad \text{donc} \qquad \mu^*(T + L) = \mu^*(T) - 1$$

et enfin

$$\chi(T + L) = \chi(T).$$

Vecteurs principaux.

1. 5. Selon l'usage, appelons vecteur principal de T toute solution non-nulle d'une équation $T^n x = 0$. T étant une transformation linéaire, il peut arriver que $\overset{-n_0}{T}(0) = \overset{-n_0+1}{T}(0)$ pour un certain entier n_0. Dans ce cas, on aura $\overset{-n}{T}(0) = \overset{-n_0}{T}(0)$ pour *tout* $n \geqslant n_0$: sinon il existerait un $x \in E$, tel que $T^{n+1}x = 0$ et $T^n x \neq 0$, et le vecteur $y = T^{n-n_0}x$ satisferait aux conditions $T^{n_0}y \neq 0$ et $T^{n_0+1}y = 0$, supposées incompatibles.

Nous noterons $\nu(T)$ le plus petit de ces nombres entiers, s'il en existe; sinon, $\nu(T)$ sera $+\infty$, par convention.

De même, nous noterons $\nu^*(T)$ le plus petit des nombres entiers n_0 tels que $T^{n_0}(E) = T^{n_0+1}(E)$, s'il en existe; sinon, $\nu^*(T) = \infty$ par convention.

F. Riesz [1] a montré, quoiqu'en ne l'énonçant que dans un cas particulier, l'égalité des deux nombres $\nu(T)$ et $\nu^*(T)$ lorsqu'ils sont tous deux finis. Nous allons la démontrer à partir de la proposition suivante, dont nous aurons besoin par la suite :

Proposition. — *Si* $\nu = \nu(T)$ *est fini, alors* $T^\nu(E) \cap \overset{-n}{T}(0) = (0)$.

Montrons d'abord que $T^\nu(E) \cap \overset{-1}{T}(0) = (0)$; dans le cas contraire, il existerait une solution $x_1 \neq 0$ de l'équation $Tx = 0$ dans $T^\nu(E)$; appelons x_2 une solution appartenant à $T^{\nu-1}(E)$ de $Tx = x_1$; on a $T^2x_2 = 0$ et $Tx_2 = x_1$, $x_1 \neq 0$; en général, nommons x_n une solution, dans $T^{\nu-n+1}(E)$ de $Tx = x_{n-1}$, pour $n \leqslant \nu + 1$; on a $T^n x_n = 0$ et $T^{n-1}x_n = x_1 \neq 0$. Or, ceci est impossible puisque $x_{\nu+1}$ satisfait à la fois aux équations $T^{\nu+1}x_{\nu+1} = 0$ et $T^\nu x_{\nu+1} = x_1 \neq 0$, et que $\overset{-\nu}{T}(0)$ et $\overset{-\nu-1}{T}(0)$ ne seraient pas identiques.

Mais alors $T^n x = 0$ ne peut avoir de solution autre que 0 dans $T^\nu(E)$, pour tout entier n, ce qui démontre la proposition.

1. 6. Nous avons maintenant le :

Théorème. — *Soit* T *une transformation linéaire de l'espace vectoriel* E *dans lui-même; si les deux nombres* $\nu(T)$ *et* $\nu^*(T)$ *sont finis, ils sont égaux et* E *est la somme directe de* $T^\nu(E)$ *et* $\overset{-\nu}{T}(0)$.

Montrons que, si $\nu(T)$ et $\nu^*(T)$ sont tous deux finis,

$$T^{\nu^*}(E) \cap \overset{-\nu}{T}(0) = (0).$$

En effet, d'après la proposition 1. 5., si $\nu(T) \leqslant \nu^*(T)$, on a

$$T^{\nu^*}(E) \subset T^{\nu}(E),$$

donc $T^{\nu^*}(E) \cap \overset{-}{T}(o) \subset T^{\nu}(E) \cap \overset{-}{T}^{\nu}(o) = (o)$; et si, à l'inverse, $\nu(T) \geqslant \nu^*(T)$, on a $T^{\nu^*}(E) = T^{\nu}(E)$ donc $T^{\nu^*}(E) \cap \overset{-}{T}^{\nu}(o) = (o)$.

T est donc une application biunivoque de $T^{\nu^*}(E)$ sur $T^{\nu^*}(E)$.

Montrons que $\nu(T) \leqslant \nu^*(T)$: en effet, $T^{\nu^*}\left[\overset{-}{T}^{\nu^*-1}(o)\right]$ est contenu dans $T^{\nu^*}(E) \cap \overset{-}{T}^{1}(o) = (o)$, ce qui entraîne $\overset{-}{T}^{\nu^*-1}(o) = \overset{-}{T}^{\nu^*}(o)$, c'est-à-dire $\nu \leqslant \nu^*$.

Un raisonnement semblable conduirait à $\nu^* \leqslant \nu$; on a donc bien $\nu(T) = \nu^*(T)$.

Enfin, soit $x \in E$ un vecteur quelconque; l'équation $T^{2\nu}y = T^{\nu}x$ a une solution unique dans $T^{\nu}(E)$, soit y. Posons $x' = T^{\nu}y$; nous obtenons $T^{\nu}(x - x') = o$, donc $x - x' \in \overset{-}{T}^{\nu}(o)$. On a bien $x = x' + (x - x')$, $x' \in T^{\nu}(E)$ et $x - x' \in \overset{-}{T}^{\nu}(o)$, quel que soit $x \in E$. Et cette décomposition de x est unique, puisque $T^{\nu}(E) \cap \overset{-}{T}^{\nu}(o) = (o)$.

Transformations de type fini.

1. 7. A certains égards, les transformations linéaires « les plus simples » envisagées dans la suite de ce travail sont celles qui vérifient : $\mu(T) = \mu^*(T)$ et $\nu(T) = \nu^*(T)$, ces quatre nombres étant finis. Convenons qu'elles seront dites *de type fini*.

PROPOSITION. — *Chacune des conditions suivantes est suffisante pour que* T *soit de type fini :*

1° $\chi(T)$ *est déterminé,* $\nu(T)$ *et* $\nu^*(T)$ *finis.*

2° $\chi(T) \leqslant o$ *est fini,* $\nu^*(T)$ *est fini.*

3° $\chi(T) \geqslant o$ *est fini,* $\nu^*(T)$ *est fini.*

Supposons vrai le 1°. D'après le théorème 1. 6., $\nu(T)$ et $\nu^*(T)$ sont égaux et $E = T^{\nu}(E) \oplus \overset{-}{T}^{\nu}(o)$ (somme directe). On a donc $\mu(T^{\nu}) = \mu^*(T^{\nu})$. Puisque $\chi(T)$ est déterminé, l'un au moins des deux nombres $\mu(T)$ et $\mu^*(T)$ est fini, donc aussi l'un au moins des deux nombres $\mu(T^{\nu})$ et $\mu^*(T^{\nu})$, donc les deux, et l'on a $\chi(T^{\nu}) = o$; ceci entraîne $\chi(T) = o$ et $\mu(T) = \mu^*(T)$ finis. T est donc de type fini.

Supposons vrai le 2°. On a, pour tout n, $\chi(T^n) = n\,\chi(T)$ donc $o \geqslant n\,\chi(T) = \mu(T^n) - \mu^*(T^n) = \mu(T^n) - \mu^*(T^{\nu^*})$ si $n \geqslant \nu^*(T)$.

Or, il en résulte que $\mu(T^n)$ ne peut croître indéfiniment, puisqu'il ne peut dépasser $\mu^*(T^{\nu^*})$. Donc on a $\mu(T^n) = \mu(T^{n+1})$ dès que n est assez grand, c'est-à-dire que $\nu(T)$ est fini. Nous nous retrouvons dans le cas 1° et T est de type fini.

Raisonnement analogue pour 3°.

Remarque. — *Si* $\nu^*(T)$ *est fini, et si* $0 < \chi(T) < \infty$, *ou bien si* $\nu(T)$ *est fini et si* $-\infty < \chi(T) < 0$, T *peut ne pas être de type fini.*

Soit E un espace vectoriel possédant une base infinie dénombrable $\{e_i\}_{1 \leqslant i}$. Soit T la transformation linéaire définie par $Te_i = e_{i+1}$ pour tout i. On a évidemment :

$$\mu(T) = 0, \qquad \mu^*(T) = 1, \qquad \nu(T) = 0, \qquad \nu^*(T) = \infty.$$

Soit aussi T′ la transformation linéaire définie par $T'e_1 = 0$ et $T'e_{i+1} = e_i$. On a cette fois :

$$\mu(T') = 1, \qquad \mu^*(T') = 0, \qquad \nu(T') = \infty, \qquad \nu^*(T') = 0.$$

On remarquera que, pour $\chi(T) = 0$, on a toujours $\nu(T) = \nu^*(T)$, les deux membres ayant toujours la même valeur, finie ou infinie.

Exemple. — I étant l'identité dans $E(x \to x$, quel que soit $x \in E)$, la transformation $T = I + L$ est de type fini, quelle que soit la transformation L linéaire et de rang fini. En effet, on a

$$\chi(T) = \chi(I + L) = \chi(I)$$

qui est nul, et les solutions des équations $T^n x = 0$, dépendent linéairement d'un nombre fini d'entre elles, ce qui implique $\nu(T) < \infty$: pour s'en assurer, on remarquera que, si $T^n x = 0$, on a $x = Ax$, où A est un polynôme en I, sans terme constant, donc $x \in L(E)$, et la dimension de L(E) est finie par hypothèse.

T-chaînes de vecteurs.

1.8. Désignons maintenant par E_1 le sous-espace $\bigcap_{n=1}^{\infty} T^n(E)$, par T_1 la restriction de T à E_1.

Appelons T-*chaîne d'origine* e_1 une suite $\mathcal{C} = \{e_i\}_{1 \leqslant i}$ finie ou infinie, telle que :

1° $Te_1 = 0$, $Te_{i+1} = e_i$ pour $i \geqslant 1$.

2° Aucune autre suite de vecteurs satisfaisant au 1° avec même premier vecteur e_1 que $\mathcal{C}$ ne comporte plus de termes que $\mathcal{C}$.

On appellera *n-ième chaînon de* $\mathcal{C}$ le vecteur e_n, *longueur de* $\mathcal{C}$ le

nombre de ses termes. Toutes les T-chaînes de même origine (s'il en existe) sont de même longueur à cause de la condition 2°.

PROPOSITION. — *Soit e_1 un vecteur quelconque de $\overset{-1}{T}(0)$; il existe une T-chaîne d'origine e_1, qui est de longueur infinie si et seulement si $e_1 \in E_1$.*

Supposons d'abord qu'il existe un entier m tel que $e_1 \in T^{m-1}(E)$ et $e_1 \notin T^m(E)$. Toute T-chaîne qui aurait e_1 pour origine serait de longueur au plus m, d'après 2°. Appelons e_m une solution de l'équation $T^{m-1}x = e_1$, et posons $e_i = T^{m-i}e_m$; $\mathcal{C} = \{e_i\}$ est une suite satisfaisant 1° et comportant m termes; c'est donc une T-chaîne d'origine e_1, de longueur m finie.

Reste le cas des vecteurs appartenant à *tous* les sous-espace $T^m(E)$; soit donc $e_1 \in E_1$; remarquons que $T(E_1) = E_1$, il existe donc une solution $e_2 \in E_1$ de l'équation $Tx = e_1$; si e_{n-1} est un vecteur de E_1, il existe de même une solution $e_n \in E_1$ de l'équation $Tx = e_{n-1}$. Il existe ainsi une suite satisfaisant 1° et infinie : elle satisfait nécessairement 2° et constitue une T-chaîne d'origine e_1, de longueur infinie.

1.9. Convenons de dire que *plusieurs T-chaînes sont indépendantes* lorsque tous leurs chaînons sont linéairement indépendants. Nous allons construire une base de $\overset{-1}{T}(0)$, telle que les chaînons d'ordres au plus n de T-chaînes ayant les vecteurs de base pour origines forment des bases des $\overset{-n}{T}(0)$. Cette construction nous sera utile par la suite.

Dans ce but, démontrons le lemme suivant :

LEMME. — *Pour que plusieurs T-chaînes soient indépendantes, il suffit que leurs premiers chaînons le soient. Si plusieurs T-chaînes sont indépendantes, leurs $(n+1)$-ièmes chaînons sont indépendants de $\overset{-n}{T}(0)$, pour tout n.*

Soient e_1^j, $1 \leqslant j \leqslant p$, p vecteurs indépendants appartenant à $\overset{-1}{T}(0)$, $\mathcal{C}_j = \{e_i^j\}_{i \leqslant i}$ des T-chaînes. Désignons par J_k l'ensemble des indices j pour lesquels $\mathcal{C}_j$ possède un $(k+1)$-ième chaînon. Il ne peut y avoir de combinaison linéaire z des e_{k+1}^j qui appartienne à $\overset{-k}{T}(0)$, sinon l'on aurait $z = \sum_{j \in J_k} \lambda_j e_{k+1}^j$ avec des λ_j non tous nuls et $T^k z = 0$; on en déduirait : $\sum_{j \in J_k} \lambda_j T^k e_{k+1}^j = 0$, donc $\sum_{j \in J_k} \lambda_j e_1^j = 0$, ce qui est impossible, puisque les e_1^j sont indépendants. Donc les T-chaînes $\mathcal{C}_j$ sont indépendantes et leurs $(k+1)$-ièmes chaînons sont indépendants de $\overset{-k}{T}(0)$.

1. 10. Grâce à ce lemme, nous allons maintenant démontrer le :

THÉORÈME. — *Soit* T *une transformation linéaire de l'espace vectoriel* E *dans lui-même. Il existe une base* $\mathcal{B} = \{e_i^\iota\}_{\iota \in I}$ *de* $\overset{-1}{T}(o)$ *telle que, si* $\mathcal{C}_\iota$ *est une* T*-chaîne d'origine* e_i^ι *pour chaque* $\iota \in I$, *les chaînons d'ordre au plus* n *des* $\mathcal{C}_\iota$ *forment une base* $\mathcal{B}_n$ *de* $\overset{-n}{T}(o)$ *pour tout* n.

Construisons la base $\mathcal{B}$ de $\overset{-1}{T}(o)$ comme il suit :

Les vecteurs de $\overset{-1}{T}(o) \cap E_1$ forment un sous-espace de $\overset{-1}{T}(o)$; soit $\mathcal{S}_\infty$ une base de ce sous-espace. Les vecteurs de $\overset{-1}{T}(o) \cap T^n(E)$ forment un sous-espace de $\overset{-1}{T}(o) \cap T^{n-1}(E)$ pour chaque $n \geqslant 1$; soit $\mathcal{S}_n$ une base d'un supplémentaire quelconque de $\overset{-1}{T}(o) \cap T^n(E)$ dans $\overset{-1}{T}(o) \cap T^{n-1}(E)$. Enfin, posons $\mathcal{B} = \bigcup_{i \geqslant 1} \mathcal{S}_i$; $\mathcal{B}$ est une base de $\overset{-1}{T}(o)$, nommons $\{e_i^\iota\}_{\iota \in I}$ ses éléments, I étant un ensemble d'indices.

Posons encore $\mathcal{S}'_k = \bigcup_{i \geqslant k} \mathcal{S}_i$ et appelons J_k l'ensemble d'indices, partie de I, tel que les relations $\iota \in J_k$ et $e_i^\iota \in \mathcal{S}'_k$ soient équivalentes.

Soient enfin $\mathcal{C}_\iota$, $\iota \in I$, des T-chaînes quelconques avec $e_1^\iota \in \mathcal{C}_\iota$.

Supposons que la propriété énoncée soit fausse à partir de l'indice k ($\geqslant 2$). C'est qu'il existe un vecteur de $x \in \overset{-k}{T}(o)$ qui n'est pas combinaison linéaire de vecteurs de $\overset{-k+1}{T}(o)$ et de chaînons d'ordre k. Le vecteur $T^{k-1}x$ est pourtant une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{S}'_k$; on a donc $T^{k-1}x = \sum_{\iota \in J_k} \lambda_\iota e_1^\iota$, les λ_ι étant nuls sauf au moins l'un d'eux et au plus un nombre fini d'entre eux. Or, pour chaque $\iota \in J_k$, il existe un e_k^ι tel que $T^{k-1}e_k^\iota = e_1^\iota$ donc on a : $T^{k-1}x = \sum_{\iota \in J_k} \lambda_\iota T^{k-1}e_k^\iota$; nous avons là une contradiction, car cela équivaut à

$$x - \sum_{\iota \in J_k} \lambda e_k^\iota \in \overset{-k+1}{T}(o),$$

supposée fausse.

Nous avons donc prouvé le théorème énoncé, par récurrence sur k, à partir de $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$ qui est une base de $\overset{-1}{T}(o)$ par construction.

1. 11. CONSÉQUENCES. — *Si* V *a une inverse à droite, elle n'a pas de chaîne finie.*

Ceci équivaut à $\mu^*(V) = o$, on a $\mu^*(V^n) = o$ pour tout n, donc

$\mu(V^n) = \chi(V^n) = n\,\chi(V) = n\,\mu(V)$. D'autre part, $V(E) = E$ donc $E = E_1$ et V n'a que des chaînes infinies.

Enfin, *si* $\nu(T)$ *est fini,* T *n'a pas de* T-*chaîne infinie.* Au contraire $\nu(T)$ peut être infini sans que T possède de T-chaîne infinie. En ce cas, $\mu(T)$ est infini; considérons par exemple un espace vectoriel E à base dénombrable $\{e_i\}_{i \leq 0}$, et la transformation T définie par :

$$\begin{array}{lll} Te_1 = 0 & & \\ Te_2 = 0, & Te_3 = e_2 & \\ Te_4 = 0, & Te_5 = e_4, & Te_6 = e_5 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{array}$$

On a bien $\nu(T) = \infty$, mais toute T-chaîne est finie.

CHAPITRE II

ÉTUDE DE LA CONDITION DE RÉSOLUBILITÉ DE FREDHOLM

Définitions et notations.

2. 1. Soit E un espace vectoriel sur le corps R ou le corps C, et E^* le dual algébrique de E. Donnons-nous un sous-espace quelconque G de E^*. Les hyperplans dans E qui possèdent une équation de la forme :

$$\langle x, y\rangle = 0, \qquad y \in G,$$

seront appelés G-*hyperplans* et nous désignerons leur famille par $\mathcal{H}(G)$. Nous emploierons encore les notations $\mathcal{J}(G)$, $\mathcal{J}'(G)$, pour désigner respectivement la famille des *intersections de* G-*hyperplans* et la famille des *intersections finies de* G-*hyperplans*. Soit E_0 l'intersection de tous les G-hyperplans; la relation $E_0 = (0)$ exprime que E et G sont en dualité, par la forme bilinéaire canonique $(x, y) \to \langle x, y\rangle$; enfin, E/E_0 et G sont toujours en dualité.

Nous emploierons la notation $\mathcal{L}(G)$ pour désigner l'ensemble des transformations linéaires de E dans E qui ont la forme

$$Lx = \sum_{i=1}^{n} \langle x, y_i\rangle x_i, \qquad x_i \in E, \quad y_i \in G.$$

2. 2. Soit F un second espace vectoriel, sur le même corps de coefficients que E, et $B(x, y)$ une forme bilinéaire sur $E \times F$. Lorsque B satisfait à la condition suivante :

D. — *Pour chaque* $y \in F$ *différent de* 0, *il existe un* $x \in E$ *tel que*

$$B(x, y) \neq 0,$$

la donnée de F et B revient à la donnée d'un sous-espace G de E^*; en effet, F est isomorphe à l'espace vectoriel des applications $x \to B(x, y)$,

$y \in F$, et celui-ci à un sous-espace G de E^*, avec de plus identification de $B(x, y)$ sur $E \times F$ et de la forme bilinéaire canonique $\langle x, y \rangle$ restreinte à $E \times G$.

Quand la condition D est aussi remplie lorsqu'on échange les rôles de E et de F, E_0 se réduit à (o) et par suite E et F sont mis en dualité par $B(x, y)$, comme E et G par $\langle x, y \rangle$. Nous renverrons à l'ouvrage de N. Bourbaki ([2], p. 48 et suivantes) pour les résultats que nous utiliserons sur les espaces en dualité.

Lorsque la condition D n'est pas remplie, on peut considérer le sous-espace F_0 de F défini par :

$$B(x, y) = 0 \qquad \text{lorsque} \qquad x \in E;$$

alors F/F_0 et E/E_0 sont en dualité.

EXEMPLES.

2. 3. Comme exemple relatif à la définition donnée en 2. 1., considérons un espace vectoriel E quelconque, et son dual algébrique E^* tout entier. Dans ce cas, $\mathcal{H}(E^*)$ contient tous les hyperplans dans E, $\mathcal{J}(E^*)$ tous les sous-espaces de E, $\mathcal{J}'(E^*)$ tous les sous-espaces de codimension finie, $\mathcal{L}(E^*)$ toutes les transformations de rang fini de E dans E. Enfin, $E_0 = (0)$: il est bien connu que E et E^* sont mis en dualité par $\langle x, y \rangle$.

Supposons que E soit muni d'une topologie τ compatible avec sa structure vectorielle, dans laquelle E'_τ soit le dual topologique de E, que nous considérerons comme un sous-espace du dual algébrique E^*. Nous dirons que τ *est compatible avec* G pour exprimer que G est identifié au dual E'_τ. Rappelons que E_0 ne se réduit pas toujours à (o) dans ce cas, c'est-à-dire que E et E'_τ ne sont pas toujours en dualité; en particulier, il existe des espaces vectoriels topologiques tels que $E'_\tau = (0)$, donc $\langle x, y \rangle = 0$ sur $E \times E'_\tau$, et $E_0 = E$ (voir par exemple N. Bourbaki, [1], p. 30).

Topologie $\sigma(G)$.

2. 4. PROPOSITION. — *La famille des topologies sur* E, *compatibles avec* G, *n'est pas vide, et sa borne inférieure* $\sigma(G)$ *est localement convexe.*

Soit $\sigma = \sigma(G)$ la moins fine des topologies sur E rendant continues les formes linéaires $x \to \langle x, y \rangle$, $y \in G$. Les ensembles $V(y_1, y_2, \ldots, y_n; \alpha)$ formés des vecteurs $x \in E$ tels que $|\langle x, y_i \rangle| \leqslant \alpha$, où $y_i \in G$, n entier, $\alpha > 0$ quelconque, forment un système fondamental de σ-voisinages de o dans E. Cette topologie est donc localement

convexe, séparée ou non selon que le sous-espace E_0 est ou n'est pas réduit à (0), puisque E_0 est visiblement la σ-adhérence de 0 dans E.

Montrons que σ est compatible avec G; on a évidemment $G \subset E'_\sigma$ par définition. Démontrons que l'on a $E'_\sigma = G$. Soit $x \to f(x)$ une forme linéaire σ-continue. La topologie σ est définie par l'ensemble de semi-normes :

$$\operatorname*{Sup}_{1 \leqslant i \leqslant n} |\langle x, y_i \rangle|, \qquad y_i \in G, \qquad n \text{ entier.}$$

On a donc :
$$|f(x)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{1 \leqslant i \leqslant n} |\langle x, y_i \rangle|$$

pour un nombre fini n de points $y_i \in G$; par conséquent les relations :

$$\langle x, y_i \rangle = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

entraînent :
$$f(x) = 0.$$

Il existe donc une combinaison linéaire y des y_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, telle que $f(x) = \langle x, y \rangle$.

2. 5. D'après la relation $E'_\sigma = G$, les topologies $\sigma(G)$ et $\sigma(G')$ sont effectivement différentes lorsque G et G' sont différents; $\sigma(G)$ est moins fine que $\sigma(G')$ lorsque $G \subset G'$.

Il résulte aussi de la définition de $\sigma(G)$ que cette topologie coïncide avec la topologie $\sigma(E, G)$ de N. Bourbaki [2] lorsque E et G sont en dualité; dans tous les cas, la topologie quotient de $\sigma(G)$ dans E/E_0 est identique à la topologie $\sigma_{E/E_0}(G)$ que l'on peut définir de la même manière sur E/E_0, laquelle n'est autre que la topologie localement convexe séparée $\sigma(E/E_0, G)$.

Les G-hyperplans sont les hyperplans σ-fermés; ce sont les hyperplans τ-fermés dans chaque topologie τ compatible avec G : si $\mathcal{H} \in (G)$ il a une équation $\langle x, y \rangle = 0$, où $y \in G$, donc est σ-fermé, et même τ-fermé lorsque τ est plus fine que σ; si H est τ-fermé, il a une équation $\langle x, y \rangle = 0$, où $y \in E'_\tau = G$, donc $H \in \mathcal{H}(G)$.

De la relation $E'_\tau = G$ définissant les topologies τ compatibles avec G, on déduit aussi que $\mathfrak{L}(G)$ est la famille des transformations de rang fini τ-continues pour chaque topologie τ compatible avec G, en particulier pour $\sigma(G)$.

Intersections de G-hyperplans.

2. 6. Les intersections de G-hyperplans sont exactement les sous-espaces $\sigma(G)$-fermés, puisque $\sigma(G)$ est localement convexe; ce sont les sous-espaces qui ont la propriété d'être fermés dans toutes les

topologies compatibles avec G. Enfin, ils contiennent tous E_0, intersection de tous les G-hyperplans.

En général, on ne peut affirmer qu'un sous-espace de E, qui est τ-fermé pour une topologie τ sur E compatible avec G, et qui contient le sous-espace E_0, soit une intersection de G. hyperplans. En effet, il existe des espaces vectoriels topologiques qui sont en dualité avec leur dual topologique, sans pour autant être localement convexes séparés; c'est ce qui se produit par exemple avec les espaces L^p, $0 < p < 1$.

Au contraire, si τ, compatible avec G, est localement convexe séparée, il est clair que tout sous-espace τ-fermé est une intersection d'hyperplans τ-fermés, c'est-à-dire de G-hyperplans; de même, si τ est compatible avec G, et si la topologie quotient de τ dans E/E_0 est localement convexe séparée, tout sous-espace τ-fermé de E, contenant E_0, est une intersection de G-hyperplans.

Si E est somme directe topologique dans une topologie τ de deux sous-espaces M et N, nous écrirons

$$E = M \underset{\tau}{\oplus} N.$$

Nous dirons que chacun des espaces M et N est τ-supplémentaire de l'autre. En ce cas M et N sont τ-fermés; mais cette condition ne suffit pas, si E n'est pas métrisable et complet.

Proposition. — *Soit τ une topologie compatible avec G. Tout sous-espace de E, contenant E_0 et possédant un τ-supplémentaire dans E est une intersection de G-hyperplans.*

Si M est de dimension finie pour que l'on ait $E = M \oplus N$, il faut et suffit que N soit τ-fermé (N. Bourbaki).

Soit N un tel sous-espace, M un τ-supplémentaire de N dans E; montrons que, pour tout $x_1 \in M$ autre que 0, il existe un hyperplan τ-fermé contenant N et ne passant pas par x_1: en effet, $x_1 \notin N$, donc $x_1 \notin E_0$; il existe un $H_1 \in \mathcal{H}(G)$ ne passant pas par x_1; soit $\langle x, y_1 \rangle = 0$ une équation de H_1, $\langle x_1, y_1 \rangle \neq 0$. P désignant la projection τ-continue de E sur M parallèlement à N, $\langle Px, y_1 \rangle = \langle x, y_1' \rangle$ avec un $y_1' \in G$, car $\langle Px, y_1 \rangle$ définit une forme τ-continue sur E, telle que $f(x) = 0$ sur N et $f(x_1) \neq 0$; l'équation $\langle x, y_1' \rangle = 0$ définit un hyperplan H_1' passant par N sans passer par x_1.

Or N est l'intersection des H_1' lorsque x_1 parcourt tout M. En effet, soit x un vecteur quelconque de E n'appartenant pas à N; le vecteur $Px \neq 0$ appartient à M et il existe un des hyperplans en

question passant par N, en particulier contenant $x - Px$, et qui ne contient pas Px, donc ne passe pas par $x = Px + (x - Px)$.

THÉORÈME. — *Soit* N *un sous-espace de codimension finie dans* E. *Pour que* N *soit une intersection de* G-*hyperplans, il faut et il suffit que* N *soit fermé dans* E *pour une topologie compatible avec* G; (*il est alors fermé pour toute topologie compatible avec* G).

Supposons que N soit τ-fermé, τ étant compatible avec G, et de codimension finie n. Tout supplémentaire algébrique de N est alors un τ-supplémentaire (voir N. Bourbaki, [1], p. 28); soit M un tel sous-espace de E, $\{e_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, une base de M.

Pour tout i, appelons H_i le sous-espace de E somme directe de N et de $[e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n]$; H_i est τ-fermé dans E et de codimension 1, donc est un G-hyperplan; $N = \bigcap_{i=1}^{n} H_i \in \mathfrak{J}'(G)$.

2.8. PROPOSITION. — *Soit* M *un sous-espace de* E *de dimension* n.

(1) $E_0 + M$ *est une intersection de* G-*hyperplans.*

(2) *Si* M *est indépendant de* E_0, et si $\{x_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, *est une base de* M, *il existe* n *vecteurs indépendants* $y_i \in G$, *tels que* $\langle x_i, y_j \rangle = \delta_{ij}$.

Démontrons (1) : soit M′ un supplémentaire quelconque de $M \cap E_0$ dans M; $M + E_0 = M' \oplus E_0$ est $\sigma(G)$-fermé dans E car E_0 est σ-fermé et M′ de dimension finie. Donc $M + E_0 \in \mathfrak{J}(G)$.

Démontrons (2) : d'après (1), quel que soit le sous-espace M_1 de M, $E_0 + M_1 \in \mathfrak{J}(G)$. Soit $M_i = [x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n]$. Chaque sous-espace $M_i + E_0 \in \mathfrak{J}(G)$ et ne contient pas x_i. Il existe donc n G-hyperplans H_i tels que $x_i \notin H_i$ et $M_i + E_0 \in H_i$ ceci équivaut à l'existence de n vecteurs $y_i \in G$ tels que $\langle x_i, y_j \rangle = \delta_{ij}$, ces relations impliquant d'ailleurs l'indépendance des y_i.

THÉORÈME. — *Soit* M *un sous-espace de* E *de dimension finie, et* τ *une topologie compatible avec* G. *Pour que* M *possède un* τ-*supplémentaire dans* E, *il faut et il suffit qu'il soit indépendant de* E_0.

Suffisance : d'après la proposition précédente, si $M \cap E_0 = (0)$, et si $\{x_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, est une base de M, il existe n vecteurs $y_i \in G$, tels que $\langle x_i, y_j \rangle = \delta_{ij}$; donc les équations $\langle x, y_i \rangle = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, définissent un sous-espace N de E, de codimension n, τ-fermé, tel que $M \cap N$ se résuise à (0); N est donc un τ-supplémentaire de M.

Nécessité : si M est de dimension finie n dans E et possède un

τ-supplémentaire N, celui-ci est τ-fermé et de codimension n, donc appartient à $\mathfrak{J}'(G)$; il contient E_0, ce qui implique $M \cap E_0 \subset M \cap N = (0)$.

REMARQUE. — *Soit* E *un espace vectoriel topologique,* E_0 *l'intersection de tous les hyperplans fermés dans* E. *Pour que tout sous-espace de* E *de dimension finie ait un supplémentaire topologique dans* E, *il faut et il suffit que* E_0 *se réduise à* (0). *Cette condition peut se trouver remplie sans que* E *soit localement convexe séparé.*

G-transposée d'une transformation linéaire.

2. 9. Nous considérerons maintenant des transformations linéaires de E dans E et de G dans G, associées par *couples* (T, U). Provisoirement, nous utiliserons la notation $\chi(T, U)$ pour la différence $\mu(T) - \mu(U)$ entre les dimensions des noyaux de T et U; $\chi(T, U)$ est donc déterminé seulement si $\mu(T)$ et $\mu(U)$ ne sont pas tous les deux infinis, et peut alors prendre les valeurs entières des deux signes, la valeur $+\infty$ et la valeur $-\infty$.

Soit T une transformation linéaire de E dans E; pour qu'il existe une transformation linéaire T′ de G dans G, que nous appelerons alors G-*transposée de* T, telle que :

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T'y\rangle \qquad \text{pour tout } x \in E \text{ et tout } y \in G,$$

il faut et il suffit que la condition suivante soit remplie :
$\underline{T}$. — *Pour chaque* $y \in G$, *il existe un* $z \in G$, *tel que* $\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle$ *pour tout* $x \in E$.

En effet, supposons que deux vecteurs z_1 et z_2 de G satisfassent à cette relation pour le même $y \in G$; le vecteur $z_1 - z_2$ la satisferait pour $0 \in G$, ce qui contredirait $\underline{D}$ (2. 2.).

L'énoncé $\underline{T}$ constitue précisément une condition nécessaire et suffisante pour la σ-continuité de T; en effet, il exprime que l'application $x \to \langle Tx, y\rangle$, $y \in G$, composée de $x \to Tx$ et $x \to \langle x, y\rangle$, peut s'écrire $x \to \langle x, z\rangle$ avec un $z \in G$, ce qui équivaut à sa σ-continuité; et la σ-continuité de toutes les applications $x \to \langle Tx, y\rangle$ quand y parcourt G est équivalente à la σ-continuité de T (voir N. Bourbaki [1], p. 20).

D'autre part, si T est τ-continue dans une topologie τ compatible avec G, les applications $x \to \langle Tx, y\rangle$ sont τ-continues, donc s'écrivent $x \to \langle x, z\rangle$ avec $z \in E'_\tau = G$; il en résulte que $\underline{T}$ est satisfaite, et la transformation T est G-transposable. Énonçons-le :

PROPOSITION. — *Les transformations* G-*transposables sont exactement les* $\sigma(G)$-*continues; si* τ *est compatible avec* G, *elles comprennent toutes les* τ-*continues.*

2. 10. Considérons en particulier le cas où $G = E^*$. Alors, quelle que soit la transformation linéaire T de E dans E, les applications $x \to \langle Tx, y\rangle$, $y \in E^*$, sont des formes linéaires sur E, donc s'écrivent $x \to \langle x, z\rangle$, $z \in E^*$ toute transformation linéaire est donc (E^*)-continue et E^*-transposable, fait bien connu en algèbre; la transposée T^* est appelés *transposée algébrique* de T.

Dans le cas général, G est un sous-espace de E^*, et la condition $\underline{T}$ peut s'exprimer simplement de la façon suivante :

$$T^*(G) \subset G.$$

PROPOSITION. — *Pour qu'une transformation linéaire* T *de* E *dans* E *soit* G-*transposable, il faut et il suffit que l'image de* G *par sa transposée algébrique soit contenue dans* G. *La* G-*transposée de* T *est alors la restriction à* G *de sa transposée algébrique.*

Plus généralement, si T a une G-transposée T' et si $G_1 \subset G$, la condition pour que T soit G_1-transposable est que $T'(G_1) \subset G_1$, et la G_1-transposée de T est la restriction à G_1 de T'.

Enfin, remarquons que, si T est G-transposable, $T(E_0) \subset E_0$. En effet, soit $x \in E_0$; $\langle x, y\rangle = 0$ pour tout $y \in G$, donc

$$\langle Tx, z\rangle = \langle x, T'z\rangle = 0$$

pour tout $z \in G$, et Tx est bien un vecteur de E_0.

Condition de Fredholm.

2. 11. Soient T une transformation linéaire de E dans E, U une transformation linéaire de G dans G; nous dirons que *le couple* (T, U) *est normal* si la condition suivante est satisfaite par les équations $Tx = \mathfrak{a}$ et $Uy = 0$, écrites dans E et dans G respectivement :

N. — *L'équation* $Tx = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} \in E$, *a une solution au moins dans* E *si et seulement si* $\mathfrak{a}$ *vérifie la condition suivante :* $\langle \mathfrak{a}, y\rangle = 0$ *chaque fois que* $Uy = 0$.

N équivaut aux deux conditions :

— quels que soient $x \in T(E)$ et $y \in \overset{-1}{U}(0)$, $\langle n, y\rangle = 0$;

— quel que soit $y \in \overset{-1}{U}(0)$, on a $\langle x, y\rangle = 0$, alors $x \in T(E)$.

Lorsque $U = T'$, on a toujours par ailleurs:

— si, quel que soit $x \in T(E)$, on a $\langle x, y \rangle = 0$, alors $y \in \overset{-1}{T'}(0)$.

La condition N a d'abord été énoncée par I. Fredholm comme un résultat de l'étude de ses équations intégrales, puis vérifiée pour des transformations particulières (liées simplement aux transformations compactes) et leurs transposées dans les espaces de Banach; dans ces espaces, elle a la forme géométrique suivante : *l'image de tout l'espace est fermée dans l'espace.*

PROPOSITION. — *Soit* T *une transformation linéaire de* E *dans* E; *pour qu'il existe une transformation linéaire* U *de* G *dans* G, *telle que* (T, U) *soit normal, il faut et il suffit que* $T(E) \in \mathfrak{J}(G)$.

S'il existe une telle transformation U, il est clair que T(E) est défini par les équations $\langle x, y \rangle = 0$, $y \in \overset{-1}{U}(0) \subset G$, donc $T(E) \in \mathfrak{J}(G)$.

Au contraire, si $T(E) \in \mathfrak{J}(G)$, ce sous-espace de E est défini par des équations $\langle x, y_\iota \rangle = 0$, $y_\iota \in G$, $\iota \in I$, I étant un ensemble d'indices. Soit N un supplémentaire, dans G, du sous-espace $M = [y_\iota]_{\iota \in I}$ de G. Définissons une transformation U :

$$\begin{cases} Ux = 0 \quad \text{si} \quad x \in M, \\ 0 \neq Ux \in N \quad \text{si} \quad 0 \neq x \in N, \\ U \quad \text{linéaire dans} \quad G. \end{cases}$$

Cette transformation U est bien une transformation linéaire formant avec T un couple (T, U) normal.

En particulier, d'après le théorème 2. 7., on voit que, *si* $\mu^*(T)$ *est fini, pour qu'il existe* U *telle que le couple* (T, U) *soit normal, il faut et il suffit que* T(E) *soit fermé dans une topologie compatible avec* G.

2. 12. Soit T une transformation possédant une G-transposée T'. Les équations $\langle x, y \rangle = 0$, où y parcourt $\overset{-1}{T'}(0)$ dans G, sont les équations des G-hyperplans qui contiennent T(E). Il en résulte que, si (T, T') est normal, T(E) est une intersection de G-hyperplans; et si $T(E) \in \mathfrak{J}(G)$, il est identique à l'intersection de tous les G-hyperplans le contenant, donc (T, T') est normal :

THÉORÈME. — *Supposons que* T *soit* G-*transposable. Pour que* (T, T') *soit normal, il faut et il suffit que l'on ait* $T(E) \in \mathfrak{J}(G)$.

Toute transformation linéaire de E dans E est E*-normale. Si τ est une topologie compatible avec G, et si T est τ-continue, (T, T') est G-normal si et seulement si T(E) est une intersection d'hyperplans τ-fermés.

Enfin, cette propriété se réduit à la propriété pour T(E) d'être fermé dans E *lorsque* τ *est localement convexe et séparée*, puisqu'alors tout sous-espace fermé est une intersection d'hyperplans fermés (N. Bourbaki [1], p. 74) ou *lorsque*, τ étant quelconque, *le nombre* $\mu^*(T)$ *est fini* (théorème 2. 7.).

2. 13. Lorsque (T, U) est normal, $\chi(T, U)$ n'est pas quelconque :

LEMME. — *Soit* (T, U) *un couple normal*; *on a* : $\mu^*(T) = \mu(U)$, *donc* $\chi(T, U) = \chi(T)$.

Si (T, U) est normal, on a évidemment $\mu(U) \leqslant \mu^*(T)$ car $\mu^*(T)$ est la codimension de T(E), et $\mu(U)$ le nombre minimum de G-hyperplans nécessaires à définir (par leur intersection) ce sous-espace T(E). Si $\mu^*(T)$ est fini, $\mu(U)$ l'est donc aussi.

Si $\mu(U)$ est fini, T(E) est de codimension finie et σ-fermé dans E, donc $\mu(U) = \mu^*(T)$. En particulier, $\mu^*(T)$ est fini.

Si $\mu(U) = \infty$, $\mu^*(T) = \infty$ aussi puisque nous avons vu que $\mu(U) \leqslant \mu^*(T)$.

THÉORÈME. — *Soit* T *une transformation linéaire de* E *dans* E, *ayant une* G-*transposée* T'. *Si l'un des nombres* $\mu(T')$ et $\mu^*(T)$ *est fini, une condition nécessaire et suffisante pour que* (T, T') *soit normal est leur égalité.*

Nécessité : si (T, T') est normal, on a $\mu^*(T) = \mu(T')$ d'après le lemme précédent, puisque (T, T') est un couple normal.

Suffisance : si $\mu^*(T)$ ou $\mu(T')$ est fini, leur égalité exprime que $\overset{-1}{T'}(0) = \overset{-1}{T^*}(0)$ dans E*; en effet, (T, T*) est toujours un couple normal, donc $\mu^*(T) = \mu(T^*)$ d'après le lemme. Or, ceci montre que T(E), identique à l'intersection des hyperplans $\langle x, y\rangle = 0$, où $y \in \overset{-1}{T^*}(0)$, est donc une intersection de G-hyperplans, et (T, T') est alors G-normal d'après le théorème 2. 12.

COROLLAIRE. — *Si* (T, T') *est normal*, $\chi(T, T') = \chi(T)$.

Transformations binormales.

2. 14. Nous dirons que *le couple* (T, U) *est binormal* lorsqu'il est normal, et que la condition $\underline{N}$ est encore remplie quand on y échange les rôles de T et U; autrement dit :

$\underline{N}'$. — *L'équation* $Uy = b'$, $b' \in G$, *a une solution au moins dans* G *si et seulement si* b *vérifie la condition suivante* : $\langle x, b'\rangle = 0$ *chaque fois que* $Ux = 0$.

N′ équivaut encore aux 2 conditions :

— quels que soient $x \in \overset{-1}{T}(0)$ et $y \in U(G)$, $\langle x, y \rangle = 0$;

— si, quel que soit $x \in \overset{-1}{T}(0)$, on a $\langle x, y \rangle = 0$, alors $y \in U(G)$.

Si $U = T'$, on a toujours, par ailleurs :

— si, quel que soit $y \in T'(G)$, on a $\langle x, y \rangle = 0$, alors $x \in \overset{-1}{T}(E_0)$.

Nous dirons qu'une *transformation linéaire* T de E *dans* E est G-*binormale* (ou simplement *binormale* s'il n'y a pas de risque de confusion) *lorsqu'elle est* G-*transposable et que* (T, T′) *est binormal.*

Proposition. - *Si* (T, U) *est un couple binormal, l'image par* T *de tout* G-*hyperplan est une intersection de* G-*hyperplans* :

$$T[\mathcal{H}(G)] \subset \mathcal{J}(G).$$

Soit $H \in \mathcal{H}(G)$; H a une équation $\langle x, y \rangle = 0$, $y \in G$.

a) si H ne contient pas le noyau $\overset{-1}{T}(0)$, celui-ci n'est pas réduit à (0), et H possède un supplémentaire D dans E qui est contenu dans $\overset{-1}{T}(0)$. Par conséquent, d'après la proposition 2. 12. :

$$T(H) = T(H + D) = T(E) \in \mathcal{J}(G).$$

b) si $H \supset \overset{-1}{T}(0)$, $y \in U(G)$ puisque (T, U) est un couple binormal; il existe un $z \in G$, tel que $Uz = y$, et $\langle x, z \rangle = 0$ définit un G-hyperplan H_1; les relations $x \in H$ et $Tx \in H_1$ sont équivalentes, donc $T(H) = T(E) \cap H_1 \in \mathcal{J}(G)$ comme T(E) et H_1.

Théorème. — *Soit* T *une transformation* G-*transposable telle que* (T, T′) *soit normal. Pour que* T *soit* G-*binormale, il faut et il suffit que l'image par* T *de tout* G-*hyperplan soit une intersection de* G-*hyperplans* :

$$T[\mathcal{H}(G)] \subset \mathcal{J}(G).$$

Nécessité : elle résulte de la proposition précédente, car si T′ est la G-transposée de T, le couple (T, T′) est binormal, donc

$$T[\mathcal{H}(G)] \in \mathcal{J}(G).$$

Suffisance : supposons que T soit G-normale et que la condition du théorème soit remplie; soit $b \in G$, tel que $\langle x, b \rangle = 0$ si $Tx = 0$; l'équation $\langle x, b \rangle = 0$ définit un G-hyperplan H qui contient $\overset{-1}{T}(0)$, et T(H) est de codimension 0 ou 1 dans T(E). Il existe donc

un G-hyperplan H_1 tel que $T(H) = T(E) \cap H_1$; soit $\langle x, z\rangle = 0$, $z \in G$, une équation de H_1; la relation $x \in H$ équivaut à $\langle Tx, z\rangle = 0$ donc à $\langle x, T'z\rangle = 0$. Par suite, b et $T'z$ sont colinéaires dans G, et $b \in T'(G)$. Le couple (T, T') est donc bien normal.

On en obtient aussitôt : *toute transformation linéaire de* E *dans* E *est* E*-*binormale.*

2. 15. Théorème. — *Soit* T *une transformation* G-*binormale de* E *dans* E. *On a :*

1° $T[\mathfrak{J}'(G)] \subset \mathfrak{J}(G)$.

2° $T[\mathfrak{J}'(G)] \subset \mathfrak{J}'(G)$ *si* $\mu(T')$ *est fini.*

3° $T[\mathfrak{J}(G)] \subset \mathfrak{J}(G)$ *si* $\mu(T)$ *est fini.*

Munissons E de la topologie $\sigma = \sigma(G)$.

Soit d'abord $N \in \mathfrak{J}'(G)$; N est de codimension finie et σ-fermé dans E; $N \cap \overset{-1}{T}(0)$ a donc un supplémentaire M dans $\overset{-1}{T}(0)$, qui est de dimension finie; donc $N' = N + M \in \mathfrak{J}'(G)$ $N' \supset \overset{-1}{T}(0)$ et $T(N') = T(N)$.

Puisque $N' \supset \overset{-1}{T}(0)$, N' peut se définir par m équations $\langle x, y_i\rangle = 0$, indépendantes, où $y_i \in T'(G)$; ces m équations sont donc équivalentes à m équations $\langle Tx, z_i\rangle = 0$, $z_i \in G$, qui définissent $T(N')$ comme intersection de m G-hyperplans et de $T(E)$. Donc $T(N) = T(N') \in \mathfrak{J}(G)$ et même $T(N) \in \mathfrak{J}'(G)$ si $\mu(T') < \infty$.

Si $\mu(T) < \infty$, le même raisonnement peut être fait avec $N \in \mathfrak{J}(G)$, M étant cette fois de dimension finie, non plus grâce à la codimension de N, mais parce que $\overset{-1}{T}(0)$ est de dimension finie; $N' = N + M$ est encore σ-fermé, donc appartient à $\mathfrak{J}(G)$ et contient $\overset{-1}{T}(0)$. Au lieu de définir N' par m équations, on peut alors le définir par une famille d'équations de puissance infinie si nécessaire. On a donc aussi $T(N) = T(N') \in \mathfrak{J}(G)$.

2. 16. Le théorème précédent nous permet d'étudier les conditions dans lesquelles les produits de transformations binormales sont binormaux.

Théorème. — *Si* A *et* B *sont deux transformations linéaires* G-*binormales de* E *dans* E, *et si l'un des deux nombres* $\mu^*(B)$ *et* $\mu(A)$ *est fini,* AB *est encore* G-*binormale.*

Puisque A et B sont G-transposables, elles sont $\sigma(G)$-continues; AB est par conséquent $\sigma(G)$-continue, c'est-à-dire G-transposable.

B est G-normale, donc $B(E) \in \mathfrak{J}(G)$; si $\mu^*(B) < \infty$, $B(E) \in \mathfrak{J}'(G)$ et $A[\mathfrak{J}'(G)] \subset \mathfrak{J}(G)$ d'après 2. 15., donc $[AB](E) \in \mathfrak{J}(G)$; si $\mu^*(B)$ est quelconque, mais $\mu(A) < \infty$, $A[\mathfrak{J}(G)] \subset \mathfrak{J}(G)$ toujours d'après 2. 15., donc $[AB](E) \in \mathfrak{J}(G)$. Dans les deux cas cités, $(AB, B'A')$ est donc normal.

AB est même G-binormale, car si $H \in \mathcal{H}(G)$, $B(H) \in \mathfrak{J}(G)$, donc $[AB](H) \in \mathfrak{J}(G)$ et AB est G-binormale.

Corollaire. — *Toutes les itérées d'une transformation G-binormale d'indice déterminé sont G-binormales.*

En effet, dire que l'indice de T est déterminé revient à dire que l'un des deux nombres $\mu(T)$ et $\mu^*(T)$ est fini, ce qui se conserve pour les itérées successives, et le produit $T(T^{n-1})$ est G-binormal pourvu que T et T^{n-1} le soient, n entier. On obtient le corollaire par récurrence sur n.

2. 17. Théorème. — *Soit* T *une transformation linéaire* G-*binormale de* E *dans* E. *Quelle que soit* $L \in \mathfrak{L}(G)$, *la transformation* $T + L$ *est* G-*binormale.*

Tout d'abord, T et L sont G-transposables, donc $T + L$ l'est aussi.

Puisque $L \in \mathfrak{L}(G)$, $N = \overline{L}^{1}(o) \in \mathfrak{J}'(G)$, donc $T(N) \in \mathfrak{J}(G)$ d'après 2. 15. N a un supplémentaire M de dimension finie et $[T + L](M)$ est de dimension finie; ainsi $[T + L](M) \cap T(N)$ a un supplémentaire N′ de dimension finie dans $[T + L](M)$, et

$$[T + L](E) = T(N) \oplus N';$$

puisque $T(N) \in \mathfrak{J}(G)$ est σ-fermé et N′ de dimension finie, il en résulte que $[T + L](E)$ est σ-fermé, et $[T + L](E) \in \mathfrak{J}(G)$. Le couple $(T + L, T' + L')$ est donc normal.

Soit $H \in \mathcal{H}(G)$; si $H \supset N$, on peut remplacer E par H dans le raisonnement précédent, et $[T + L](H) \in \mathfrak{J}(G)$; si H ne contient pas N, $N \cap H \in \mathfrak{J}'(G)$ et $N \cap H$ a un supplémentaire M de dimension finie dans H, et l'on peut reprendre le raisonnement précédent en remplaçant E par H et N par $N \cap H$, puisque $T[\mathfrak{J}'(G)] \subset \mathfrak{J}(G)$. Donc $[T + L](H) \in \mathfrak{J}(G)$, quel que soit $H \in \mathcal{H}(G)$, et $T + L$ est G-binormale.

Exemple. — Les transformations de la forme $T = I - L$, $L \in \mathfrak{L}(G)$, sont toutes G-binormales.

Homomorphismes binormaux.

2. 18. Envisageons un cas particulier :

THÉORÈME. — *Soit* T *un homomorphisme de* E *sur* T(E), *dans une topologie* τ *compatible avec* G; *dans les deux cas suivants :*

1° τ *est localement convexe séparée, et* T(E) *est* τ-*fermé dans* E,

2° T(E) *a un* τ-*supplémentaire, la transformation* T *est* G-*binormale.*

Soit $y \in G$, tel que $\langle x, y\rangle = 0$ si $Tx = 0$. L'application $z \to \langle x, y\rangle$ pour $z = Tx$ est une forme linéaire continue sur T(E), puisque T est un homomorphisme; dans les deux cas cités, cette forme peut se prolonger à tout E de façon continue, et si $x \to \langle x, y'\rangle$ est un tel prolongement, $y' = T'y$.

On retrouve ainsi le résultat connu déjà cité :

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe, métrisable et complet (*espace de Fréchet*). Toute transformation linéaire continue T, telle que T(E) soit fermé dans E, est binormale.

T-chaînes d'une transformation binormale.

2. 19. Certaines solutions de l'équation $Tx = 0$ peuvent appartenir au sous-espace E_0 dans E, qui est l'intersection de tous les G-hyperplans; ces solutions ont des propriétés particulières, lorsque T est binormale. Démontrons d'abord le lemme :

LEMME. — *Si* T *est binormale et* $\mu(T)$ *fini,* T *applique* E_0 *sur lui-même.*

En effet, $E_0 \in \mathfrak{I}(G)$ donc $T(E_0) \in \mathfrak{I}(G)$ et nous avons déjà vu que $T(E_0) \subset E_0$; ainsi $T(E_0) = E_0$.

PROPOSITION. — *Soit* T *une transformation binormale, avec* $\mu(T)$ *fini. Toute solution non nulle de l'équation* $Tx = 0$ *appartenant à* E_0 *est l'origine d'une* T-*chaîne infinie.*

En effet, $T(E_0) = E_0$, donc $T^n(E_0) = E_0$, quel que soit n, et $\bigcap_{n=1}^{\infty} T^n(E_0) = E_0$. Si donc T_0 désigne la restriction de T à E_0, T_0 a une inverse à droite et n'a que des T-chaînes infinies, ce qui prouve que les zéros de T appartenant à E_0 sont origines de T-chaînes infinies.

REMARQUES. — 1° Si T est une transformation binormale avec $\mu(T)$ fini, il est donc illusoire de tenter de faire disparaître ces zéros par passage au quotient de E par le sous-espace $\overset{-1}{T}(0) \cap E_0$. Dans

ce quotient, T a encore le même nombre de zéros appartenant au nouveau sous-espace E'_0.

2° Pour toute transformation $L \in \mathfrak{L}(G)$, $\overset{-1}{L}(o) \in \mathcal{J}'(G)$ donc $\overset{-1}{L}(o) \supset E_0$ et $T + L$ a les mêmes zéros que T dans E_0. *Si* T *est binormale, d'indice fini et n'a pas de zéro dans* E_0, *il en est de même de* T^n *et de* $T + L$.

2. 20. Théorème. — *Soit* T *une transformation binormale d'indice fini Soient* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *deux bases de* $\overset{-1}{T}(o)$ *et* $\overset{-1}{T'}(o)$, *engendrant par leurs chaînons d'ordre au plus n des bases* $\mathcal{B}_n$ *et* $\mathcal{B}'_n$ *de* $\overset{-n}{T}(o)$ *et* $\overset{-n}{T'}(o)$.

Alors, pour chaque n, le nombre des vecteurs de $\mathcal{B}_n$ *appartenant à des* T*-chaînes finies est égal au nombre de vecteurs de* $\mathcal{B}'_n$ *appartenant à des* T'*-chaînes finies.*

Soit de nouveau $E_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} T^n(E)$, T_1 la restriction de T à E_1; appelons $\omega(T)$ la dimension de $\overset{-1}{T}(o) \cap E_1$ qui est aussi

$$\omega(T) = \mu(T_1) = \chi(T_1) \qquad \text{car} \qquad T_1(E_1) = E_1.$$

Pour tout n, on a :

$$\omega(T^n) = \chi(T_1^n) = n\chi(T_1) = n\omega(T).$$

Appelons aussi $r_n(T)$ le nombre des vecteurs de $\mathcal{B}_n$ qui appartiennent à des T-chaînes finies. Nous savons que, dès un certain m, on a :

$$\begin{cases} r_n(T) = r_m(T) = r \\ r_n(T') = r_m(T') = r' \end{cases} \qquad \text{si} \qquad n \geqslant m.$$

Or, $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}'_n$ étant des bases de $\overset{-n}{T}(o)$ et $\overset{-n}{T'}(o)$, et puisque $\chi(T^n) = \chi(T^n, T'^n)$, on a :

$$(a) \qquad \chi(T^n) = \omega(T^n) + r_n(T) - \omega(T'^n) - r_n(T')$$

pour tout entier n. On en déduit l'égalité :

$$(b) \quad n[\omega(T) - \omega(T')] = n\chi(T) - (r - r') \quad \text{pour} \quad n \geqslant m.$$

Par conséquent :

$$(c) \qquad \begin{cases} r = r' \\ \omega(T) - \omega(T') = \chi(T). \end{cases}$$

Enfin, de (a) et (c), on déduit aussi, pour tout $n \geqslant o$ cette fois :

$$(d) \qquad \begin{cases} r_n(T) = r_n(T') \\ \omega(T^n) - \omega(T'^n) = \chi(T^n) \end{cases}$$

égalités qui se traduisent immédiatement par l'énoncé du théorème.

CHAPITRE III

N. — TRANSFORMATIONS

3. 1. Cette section concerne un certain nombre de « décompositions » d'une transformation linéaire T, comme somme de deux termes U et L, considérés comme plus simples que T; par exemple, U ne possédera pas de U-chaîne finie, ou bien U aura une inverse à gauche, ou à droite, ou bilatère; L sera une transformation de rang fini; dans d'autres cas, une topologie étant donnée sur l'espace E, L sera une transformation compacte, c'est-à-dire une transformation continue qui donne d'un certain voisinage de o une image compacte.

F. Riesz ([1], voir aussi [2]) a fait la théorie des transformations compactes dans un espace de Banach (ou transformations « complètement continues »); c'est en partant de cette théorie que S. N. Nikol'skii [1], Gohberg [1 et 2] F. V. Atkinson [1] ont établi successivement, pour l'espace de Banach, des théorèmes de décomposition que nous allons généraliser.

Nous utiliserons pour ces extensions les résultats sur les transformations compactes, analogues à ceux de F. Riesz, obtenus récemment par J. Leray [1] pour les espaces localement convexes, puis étendus par J.H. Williamson [1].

D'autres de nos théorèmes seront nouveaux, même pour l'espace de Banach (transformations de Riesz, décompositions correspondant aux T-chaînes finies).

Définitions et notations.

3. 2. Etant donné un sous-espace G du dual de E, une transformation T de E dans E sera appelée N-*transformation* relative à G lorsqu'elle est binormale, d'indice fini, et que son noyau est indépendant du sous-espace E_0. Autrement dit :

1° T possède une G-transposée T',

2° l'équation $Tx = a$, $a \in E$, possède une solution au moins dans E, si et seulement si $\langle a, y \rangle = 0$ pour toute solution de $T'y = 0$ dans G,

3° l'équation $T'y = b$, $b \in G$, possède une solution au moins dans G si et seulement si $\langle x, b \rangle = 0$ pour toute solution de $Tx = 0$ dans E,

4° le nombre $\mu(T)$ des solutions indépendantes de $Tx = 0$ dans E et le nombre $\mu(T') = \mu^*(T)$ des solutions indépendantes de $T'y = 0$ dans G sont finis,

5° pour toute solution non nulle de $Tx = 0$ dans E, il existe un $y \in G$ tel que $\langle x, y \rangle \neq 0$.

Les conditions 1° à 5° expriment que T est une N-transformation dans le langage de la théorie des équations; elles ne sont pas symétriques, à cause de 5°, parce que la condition analogue pour $T'y = 0$ est remplie automatiquement, G étant un sous-espace de E^*; c'est-à-dire que D (2. 2.) est remplie par la forme bilinéaire $\langle x, y \rangle$ sur $E \times G$.

Les conditions 1° à 4° entraînent $T(E_0) = E_0$ (2. 19.). La condition 5° peut donc être remplacée par la suivante :

5° *bis*. — T applique biunivoquement le sous-espace E_0 sur lui-même.

La condition 5° est toujours remplie lorsque $E_0 = (0)$ en particulier si $G = E^*$. Elle l'est aussi lorsque T est de type fini (1. 7.) et binormale (conséquence de la proposition 2. 19.).

Les transformations T et T^n sont des N-transformations en même temps, d'après la proposition 1. 3. (elles sont d'indices finis en même temps), le corollaire de 2. 16. (elles sont binormales en même temps) et la forme 5° *bis* de la dernière condition; il est évident, d'après la définition même des chaînes en 1. 8., que si l'une des transformations T^n, $n \geqslant 0$, possède une chaîne finie, il en est ainsi de toutes les autres.

De même, les transformations T et $T + L$ sont des N-transformations en même temps (1. 4., 2. 17., 2. 19.), quelle que soit $L \in \mathfrak{L}(G)$.

Enfin, nous dirons que T est une F-*transformation* lorsque c'est une N-transformation d'indice nul, et une R-*transformation* lorsque c'est une N-transformation de type fini; d'après la proposition 1. 7., les R-transformations sont des F-transformations possédant des chaînes finies ou bien des transformations biunivoques de E sur E.

Remarque. — Dans tout ce chapitre, compte tenu du résultat du paragraphe 2. 13., et du fait que toutes les transformations envi-

sagées seront binormales, nous utiliserons implicitement les égalités : $\mu^*(T) = \mu(T^*) = \mu(T')$ (T dans E, T^* dans E^*, T' dans G)

$$\chi(T) = \mu(T) - \mu^*(T) = \mu(T) - \mu(T^*) = \mu(T) - \mu(T')$$

sans le signaler dorénavant.

Réduction du noyau de T aux origines de chaînes infinies

3. 3. N-*tranformations.*

PROPOSITION. — *Soit* G *un sous-espace de* E^*, T *une* N-*transformation de* E *dans* E; *il existe une transformation de rang fini* $L \in \mathfrak{L}(G)$, *telle que :*

1° $T_1 = T - L$ *est une* N-*transformation, sans chaîne finie de même indice que* T, *ayant pour zéros exactement les zéros de* T *qui sont origines de* T-*chaînes infinies.*

2° L *est permutable à* T, *et* $LT_1 = T_1L = L$.

Appliquons à T le théorème 2. 20.; il existe deux bases $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}'$ de $\overline{T}^1(0)$ et $\overline{T'}^1(0)$, engendrant des bases $\mathfrak{B}_n$ et $\mathfrak{B}'_n$ de $\overline{T}^n(0)$ et $\overline{T'}^n(0)$, et un entier m tel que $\mathfrak{B}_m$ et $\mathfrak{B}'_m$ contiennent tous les chaînons de toutes les chaînes finies ayant leur origine dans $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}'$; ces chaînons forment des sous-bases, de même puissance r, de $\mathfrak{B}_m$ et $\mathfrak{B}'_m$ et engendrent des sous-espaces E_1 et G_1 qui ont même dimension r. G_1 détermine dans E un sous-espace E_2 de codimension r et ne rencontrant pas E_1, conformément à l'hypothèse suivant laquelle il n'y a pas dans E_1 de solution non nulle de l'équation $T^m y = x$. E est donc la somme directe de E_1 et E_2. Comme, par construction, $E_2 \in \mathcal{Y}(G)$, on a même :

$$E = E_1 \underset{\sigma(G)}{\oplus} E_2.$$

Posons alors :

$$\begin{cases} Lx = Tx - x & \text{si} \quad x \in E_1, \\ Lx = 0 & \text{si} \quad x \in E_2, \\ L \text{ linéaire dans } E & \text{et} \quad T_1 = T - L. \end{cases}$$

On vérifie très facilement que $T_1L = LT_1 = L$, donc que L permute avec T, et que, puisque $T(E_1) \subset E_1$ et $T(E_2) \subset E_2$, les zéros de T_1 sont les zéros de T qui étaient origine de T-chaînes infinies.

Enfin, L est σ-continue, donc $L \in \mathfrak{L}(G)$ et T_1 est une N-transformation, sans chaîne finie.

3. 4. R-*transformations.* Rappelons que le cas où il n'y a pas de chaîne finie est ici celui des transformations binormales et biunivoques de E sur E.

THÉORÈME. — *Soit* G *un sous-espace de* E*, T *une transformation linéaire de* E *dans* E; *les propositions suivantes sont équivalentes :*

1° T *est une* R-*transformation.*

2° T *est la somme,* $T = U + L$, *d'une transformation binormale biunivoque* U *et d'une transformation de rang fini* $L \in \mathfrak{L}(G)$, *permutables entre elles.*

On peut, de plus, choisir L *pour que:* $UL = LU = L$.

Montrons que 1° *implique* 2° : appliquons 3. 3. à la R-transformation T; $U = T - L$ n'a plus de zéro, puisque T n'a pas de zéro qui soit origine de T-chaîne infinie; d'autre part, $\chi(U) = \chi(T) = 0$, ce qui implique que $\mu^*(U) = 0$, donc U est une N-transformation biunivoque.

Montrons que 2° *implique* 1° : T ne diffère de U que par la transformation L de rang fini, donc est encore une N-transformation, de même indice que U, c'est-à-dire 0; de plus, puisque U est biunivoque, $T^n(E) = (I + U^{-1}L)^n(E)$, en tenant compte de la permutabilité de U avec L; $U^{-1}L$ est encore de rang fini comme L, donc $(I + U^{-1}L)$ est de type fini, et $\nu^*(T) = \nu^*(1 + U^{-1}L)$ est fini; il en résulte que T elle-même est de type fini (1. 7.), et par conséquent est une R-transformation.

3. 5. La démonstration de la proposition 3. 3. n'a visiblement pas fait intervenir la condition 5° de 3. 1.; si T est une transformation linéaire de E dans E, d'indice fini, G-binormale, il existe une transformation $L \in \mathfrak{L}(G)$, permutable à T, telle que $T - L$ n'ait pas de chaîne finie, et possède comme zéro exactement les origines de T-chaînes infinies. D'après 2. 19., les transformations T et $T - L$ remplissent en même temps, ou ne remplissent pas en même temps, cette condition 5°.

Réduction du noyau de T à (0).

3. 6. N-*transformations.* Si l'on ajoute à une N-transformation T une transformation de rang fini L de la famille $\mathfrak{L}(G)$, on obtient une N-transformation de même indice $\chi(T + L) = \chi(T)$; mais $\mu(T + L)$ et $\mu(T)$, donc $\mu^*(T + L)$ et $\mu^*(T)$, peuvent être différents. Leur différence $\chi(T)$ restant constante, le plus petit des deux nombres $\mu(T + L)$ et $\mu^*(T + L)$ reste le plus petit quand L varie. Nous allons montrer qu'un *bon choix* de L permet toujours d'annuler ce plus petit nombre, l'autre étant alors augmenté de $\chi(T)$ bien entendu.

Pour simplifier, nous ne ferons la démonstration que dans le cas $\chi(T) \leqslant 0$:

THÉORÈME. — *Soit* G *un sous-espace de* E*, T *une transformation linéaire de* E *dans* E. *Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1° T *est une* N-*transformation à indice* $\chi(T) \leqslant 0$ (*resp.* $\chi(T) \geqslant 0$).

2° T *est la somme,* $T = U + L$, *d'une* N-*transformation* U *ayant une inverse à gauche* (*resp. à droite*) *et d'une transformation de rang fini* $L \in \mathfrak{L}(G)$.

On a de plus: $\mu^*(U) = -\chi(T)$ [resp. $\mu(U) = \chi(T)$].

Nous nous plaçons donc dans le cas où $\chi(T) \leqslant 0$.

Montrons que 1° *implique* 2° : on a $\mu(T) \leqslant \mu^*(T) < \infty$, et d'autre part, puisque $\overset{-1}{T}(0)$ est indépendant de E_0, nous savons que ce sous-espace de dimension finie possède un σ-supplémentaire dans E(2. 8.), que nous pouvons appeler N, défini par l'annulation de μ formes linéaires σ-continues $x \to \langle x, y_i \rangle$, $y_i \in G$, indépendantes ne s'annulant pas identiquement sur $\overset{-1}{T}(0)$. On a :

$$E = \overset{-1}{T}(0) \underset{\sigma}{\oplus} N.$$

D'autre part, T(E) est de codimension finie $\mu^*(T)$ et σ-fermé dans E, donc a un σ-supplémentaire M dans E :

$$E = T(E) \underset{\sigma}{\oplus} M, \qquad \dim M = \mu^*(T) \geqslant \mu(T) = \dim \overset{-1}{T}(0).$$

Posons $M = M' \underset{\sigma}{\oplus} M''$, où M' et M'' sont deux supplémentaires dans M, et $\dim M' = \mu(T)$; soit $\{e_i\}$ $1 \leqslant i \leqslant \mu$, une base de M'. Soit L la transformation de rang fini définie par :

$$Lx = \sum_{i=1}^{\mu} \langle x, y_i \rangle e_i, \qquad x \in E.$$

Évidemment, $L \in \mathfrak{L}(G)$. On a $L(E) = M'$, $T(N) = T(E)$, $\overset{-1}{T}(0) \cap N = (0)$ et $N = \overset{-1}{L}(0)$. Par conséquent, si $U = T - L$, $\overset{-1}{U}(0)$ se réduit à (0) et $U(E) = T(E) \underset{\sigma}{\ominus} M'$. U est encore une N-transformation et possède une inverse à gauche.

Montrons que 2° *implique* 1° : U étant une N-transformation, $T = U + L$ en est encore une. D'autre part, $\chi(T)$ est égal à $\chi(U) = -\mu^*(U)$ puisque $\mu(U) = 0$.

3. 7. Remarques. — 1° Le théorème précédent se simplifie dans le cas d'une E-transformation : celle-ci est la somme d'une transformation $L \in \mathfrak{L}(G)$ et d'une transformation binormale biunivoque.

2° Dans le cas particulier où $G = E^*$, le théorème 3. 6. resterait visiblement valable pour $\chi(T) = \pm \infty$, ce que nous avons exclu.

Dans le cas général, il faudrait sans doute remplacer les conditions de Fredholm (N et N′ du chapitre 2) par l'existence d'un inverse relatif de T, comme l'a fait F. V. Atkinson dans un mémoire [3] où il considère des transformations continues dans un espace de Banach; dans ce cas, l'existence d'un inverse relatif continu X de T, c'est-à-dire d'une transformation linéaire continue telle que $TXT = T$, est toujours assurée lorsque T est binormale et d'indice fini, en prenant pour G le dual topologique de l'espace de Banach E, mais ne l'est plus si l'indice de T est infini.

Cas d'un espace vectoriel topologique.

3. 8. Si une topologie τ est donnée sur E, compatible avec sa structure vectorielle, nous pouvons rapporter les définitions de 3. 1. à $G = E'_\tau$, sous-espace de E^* identifié au dual topologique de E muni de τ.

Un homomorphisme T, d'indice fini, à image T(E) fermée dans E, et satisfaisant la condition 5° de 3. 1. :

$$\overset{-1}{T}(0) \cap E_0 = (0),$$

est une N-transformation. Nous parlerons dans ce cas d'un N-*homomorphisme;* de même pour un F-homomorphismes, un R-homomorphisme.

Il résulte immédiatement de cette définition que :

1° Si τ et τ' sont deux topologies sur E compatibles avec le même sous-espace G du dual de E, et si T est un N-homomorphisme dans τ et un homomorphisme dans τ', c'est un N-homomorphisme dans τ'.

2° Dans toute topologie sur E pour laquelle la transformation de type fini T est un homomorphisme à image fermée, c'est un R-homomorphisme.

Les transformations $T = I + L$, $L \in \mathfrak{L}(G)$, sont des R-homomorphismes dans toute topologie compatible avec G. Une transformation particulière $T = I + L$, L de rang fini, est un R-homomorphisme dans τ si et seulement si L est τ-continue.

3° La condition 5° est toujours remplie si τ est localement convexe séparée.

4° Si τ est une topologie d'espace métrisable complet, les N-homomorphismes sont les transformations d'indice fini, continues, à image fermée et satisfaisant la condition 5°. En particulier, si τ est une topologie d'espace de Fréchet, on retrouve les conditions adoptées par Gohberg et Atkinson pour l'espace de Banach : les N-homomorphismes sont les transformations d'indice fini, continues, à images fermées.

3. 9. R-*homomorphismes*. Pour les R-homomorphismes d'un espace vectoriel topologique dans lui-même, le théorème 3. 4. peut se préciser ainsi :

THÉORÈME. — *Soit* E *un espace vectoriel topologique,* T *une transformation linéaire de* E *dans* E; *les propositions suivantes sont équivalentes:*

1° T *est un* R-*homomorphisme.*

2° T *est la somme* $T = U + L$, *d'un isomorphisme* U *et d'une transformation de rang fini et continue* L, *permutables entre eux.*

3° T *est la somme,* $T = U + A$, *d'un isomorphisme* U *et d'une transformation compacte* A *permutables entre eux.*

On peut de plus choisir L *ou* A *pour qu'elles soient invariantes dans le produit par* U.

Pour montrer que 1° *implique* 2°, appliquons d'abord le théorème 3. 4. à T, supposée être un R-homomorphisme. Il reste à montrer que U est un isomorphisme de E sur E; or, U peut se définir comme il suit :

$$\begin{cases} Ux = x & \text{si} \quad x \in \overline{T}^{\nu}(0), \\ Ux = Tx & \text{si} \quad x \in T^{\nu}(E), \\ U \text{ est linéaire dans } E. \end{cases}$$

Mais l'on a : $E = T^{\nu}(E) \underset{\tau}{\oplus} \overline{T}^{\nu}(0)$, $T^{\nu}(E)$ étant τ-fermé et $\overline{T}^{\nu}(0)$ de dimension finie. T étant un isomorphisme de $T^{\nu}(E)$ sur lui-même, U est une composition d'isomorphismes et donc bien lui-même un isomorphisme.

2° *implique* 3°, les transformations de rang fini continues étant compactes.

Il reste à démontrer que 3° *implique* 1°. On peut supposer que $U = I$, sinon l'on écrirait :

$$T = U(I + A_1) = (I + A_1)U, \qquad A_1 = U^{-1}A;$$

A_1 est encore compacte puisque U^{-1} est continue et A compacte; et le produit d'un R-homomorphisme par un isomorphisme qui lui est permutable est évidemment un R-homomorphisme.

Or, dans le cas où $U = I$, le résultat est l'un de ceux qu'ont obtenus J. Leray et J.H. Williamson [mémoires cités] et nous renverrons à leur travail.

3. 10. Remarques. — 1° Pour le cas des espaces de Banach, notre note [2] contenait une caractérisation différente et erronée des « points de Riesz ». Ce cas des espaces de Banach a aussi été traité par S. N. Krackovskii et A. Goldman [1] par une méthode différente, utilisant l'analyticité d'un opérateur par rapport à une variable complexe.

2° Si T est un homomorphisme, aussi bien pour la topologie τ que pour la topologie τ', compatibles avec G, pour que T puisse s'écrire $T = U + A$, U et A permutables, U isomorphisme et A compacte, dans τ, il faut et il suffit qu'elle puisse s'écrire $T = U' + A'$; de même dans τ'.

N-*homomorphismes*. Le théorème 3. 6. peut aussi se préciser pour les homomorphismes d'un espace vectoriel topologique.

Théorème. — *Soit* E *un espace vectoriel topologique,* T *une transformation linéaire de* E *dans* E*; les propositions suivantes sont équivalentes:*

1° T *est un* N-*homomorphisme à indice* $\chi(T) \leqslant 0$ [*resp.* $\chi(T) \geqslant 0$].

2° T *est la somme,* $T = U + L$, *d'une transformation* U *continue et continuement inversible à gauche* [*resp. à droite*] *et d'une transformation continue de rang fini* L.

3° T *est la somme,* $T = U + A$, *d'une transformation* U *continue et continuement inversible à gauche* [*resp. à droite*] *et d'une transformation compacte* A.

Dans ces conditions, on a $\mu^*(U) = -\chi(T)$ [*resp.* $\mu(U) = \chi(T)$].

Bornons nous encore au cas de l'indice non-positif.

1° *implique* 2°, d'après 3. 6., à cela près que l'inverse à gauche de U, soit V, doit ici être continue; mais ceci résulte de ce que U est un isomorphisme de E sur U(E), et U(E) possède un supplémentaire topologique dans E, puisque ce sous-espace est de codimension finie et τ-fermé (étant $\sigma(E'_\tau)$-fermé) selon un résultat connu (N. Bourbaki, [1], p. 18).

Visiblement, 2° *implique* 3°, les transformations de rang fini continues étant des transformations compactes particulières.

Montrons que 3° *implique* 2°: soit V une inverse continue à gauche de U; on a : $T = (I + AV)U$.

La transformation AV est compacte comme A, puisque V est continue, et permutable à I comme toute transformation. D'après le théorème 3. 9., la transformation $I + AV$ peut s'écrire $U_1 + L_1$, U_1 étant continuement inversible et L_1 continue et de rang fini.

Par conséquent, $T = (U_1 + L_1)U = U_1U + L_1U$ satisfait à la proposition 2°.

Enfin, montrons que 2° *implique* 1° : compte tenu du théorème 3. 6., il nous reste seulement à démontrer que T est un homomorphisme. Or, $T = (I + LV)U$ est le produit de $I + LV$ et de U qui sont des homomorphismes à images fermées dans E, d'où il résulte bien la même propriété pour T.

On obtient alors la dernière propriété énoncée en passant par l'intermédiaire de 2° et de l'invariance de l'indice quand on ajoute une transformation de rang fini.

3. 12. Remarque. — Pour les F-homomorphismes, on voit que le théorème de décomposition de S. N. Nikolskii [1] se généralise complètement à un espace vectoriel topologique séparé, et ne dépend donc pas des propriétés de l'espace de Banach.

Autre propriété d'invariance de l'indice.

3. 13. Dans le cas d'un espace vectoriel topologique localement convexe E, G. Köthe [1] a fait l'étude des transformations qui sont la somme d'un homomorphisme T à noyau de dimension finie et à image fermée, et d'une transformation continue L, de rang fini ou compacte, montrant que $T + L$ a encore les propriétés données pour T, en utilisant des résultats de L. Schwartz [1] sur les transformations compactes.

A partir du théorème 3. 11., nous pouvons généraliser et préciser ce résultat sous la forme suivante :

Théorème. — *Dans un espace vectoriel topologique séparé, si* T *est un* N-*homomorphisme et* A *une transformation compacte,* $T + A$ *est un* N-*homomorphisme et* $\chi(T + A) = \chi(T)$.

Il suffit, pour cela, d'appliquer le théorème 3. 11. dans le sens 1° → 3° à T, ce qui donne $T = U + A'$, puis dans le sens 3° → 1° à $T + A = U + (A' + A)$.

Applications des théorèmes de « décomposition ».

3. 14. Outre les applications que nous ferons dans les chapitres suivants, remarquons que ces théorèmes de décomposition permettent d'étudier, à partir de classes d'équations que l'on sait déjà étudier, de nouvelles classes d'équations, par un procédé simple analogue à celui de la deuxième méthode de E. Schmidt [2] pour les équations intégrales. Par exemple, si T est une R-transformation, on réduira l'équation

$$Tx = a$$

à

$$Ux = a - Lx,$$

(U binormale et biunivoque), donc à

$$x + U^{-1}Lx = U^{-1}a,$$

c'est-à-dire à un système d'équations numériques.

On a une réduction du même genre pour une N-transformation.

Au point de vue du calcul effectif, une équation de ce type étant donnée, le problème devient donc d'obtenir par des calculs finis une décomposition effective de ce genre (que l'on sait seulement exister), puis d'avoir un algorithme de calcul convenable pour l'inversion du terme en U.

C'est parce qu'elle fournit une réponse à ces deux questions que la seconde méthode de E. Schmidt permet de calculer effectivement les solutions d'une équation intégrale ou même d'une équation linéaire dans un espace de Banach, comme nous le verrons ensuite.

C'est encore ainsi que se pose le problème des équations intégrales singulières (voir par exemple N. I. Muskhelishvili [1]).

CHAPITRE IV

ENSEMBLES DE NOETHER DE CERTAINES FAMILLES DE TRANSFORMATIONS

4. 1. Dans ce chapitre, nous étudions des familles $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de transformations linéaires continue d'un espace vectoriel topologique séparé E dans lui-même; Λ désigne un espace topologique, qui pourra dans certains cas (chaque fois spécifiés) être un ouvert du plan complexe C.

N désignera l'ensemble des points où T_λ est un N-homomorphisme, que nous appellerons *ensemble de Noether* de $\{T_\lambda\}$. Lorsque N sera ouvert, dans Λ, nous le décomposerons en ses composantes connexes N_ι, ι parcourant un ensemble d'indices I convenable (fini ou dénombrable lorsque Λ est un ouvert du plan). Pour simplifier, nous poserons $\chi(\lambda) = \chi(T_\lambda)$, $\mu(\lambda) = \mu(T_\lambda)$, et nous emploierons les expressions « points de Noether, de Fredholm, de Riesz » pour désigner les points où T_λ est respectivement un N-homomorphisme, un F-homomorphisme, un R-homomorphisme.

Nous allons établir d'abord un certain nombre de lemmes, pour lesquels nous aurons besoin des *conditions* suivantes :

O. — *Au voisinage de tout point* λ_0 *de* Λ, *où* T_{λ_0} *est d'indice fini et possède une inverse continue à gauche ou à droite,* T_λ *a les mêmes propriétés et* $\chi(\lambda) = \chi(\lambda_0)$.

$\overline{\text{O}}$. — *Quelle que soit la transformation linéaire continue et de rang fini* L, *la famille* $\{T_\lambda - L\}$ *satisfait à* (O).

C. — *Pour chaque point* λ_0 *de* Λ, *il existe un voisinage* V_0 *de* o *dans* E, *ayant la propriété suivante : pour tout voisinage* W *de* o, *il existe un voisinage de* λ_0 *dans lequel :* $(T_\lambda - T_{\lambda_0})(V_0) \subset W$.

Familles de transformations satisfaisant (O) ou (C).

4. 2. Lemme. — *Si la famille* $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *satisfait à* $(\overline{O})$, *alors*:

1° N *est ouvert.*

2° $\chi(\lambda)$ *est constant sur chaque composante* N.

Soit $\lambda_0 \in N$; T_{λ_0} est un N-homomorphisme, donc :

$$T_{\lambda_0} = W_{\lambda_0} + L,$$

avec L de rang fini et continue et W_{λ_0} possédant une inverse à gauche (par exemple). Mais $\{W_\lambda\}$, où $W_\lambda = T_\lambda - L$, satisfait à (O), donc W_λ a une inverse à gauche au voisinage de λ_0, et $T_\lambda = W_\lambda + L$ dans ce voisinage, ce qui prouve que N est ouvert.

Nous savons de plus que $\chi(\lambda) = \chi(W_\lambda)$, donc que $\chi(\lambda) = \chi(\lambda_0)$ dans tout ce voisinage de λ_0; à partir de λ_0, on peut ainsi construire tout un ensemble ouvert connexe maximal Ω, contenu dans N, où l'indice est égal à $\chi(\lambda_0)$. Un point de $\overline{\Omega}$ ne peut pas être un point de N avec une valeur de l'indice autre que $\chi(\lambda_0)$, sinon il existerait un voisinage de ce point λ_1 où l'on aurait $\chi(\lambda_1) = \chi(\lambda)$, ce qui est contradictoire puisque tout point de $\overline{\Omega}$ a tous ses voisinages qui contiennent des points à indice $\chi(\lambda_0)$. Ω est donc une composante connexe de N, sur laquelle $\chi(\lambda) = \chi(\lambda_0) = \text{Cte}$.

4. 3. Lemme A. — *Si* $\{T_\lambda\}$ *satisfait à* (C) *et si* T_{λ_0} *est un isomorphisme de* E *sur un sous-espace* $T_{\lambda_0}(E)$ *fermé, alors dans un voisinage de* λ_0, T_λ *est un isomophisme de* E *sur* $T_\lambda(E)$; *pour tout voisinage* V *de* o, *il existe un voisinage* W *de* o *et un voisinage de* λ_0 *dans lequel* $T_\lambda(V) \supset W \cap T_\lambda(E)$.

Soit V un voisinage de o; soit V_1 un voisinage ouvert disqué, $V_1 \subset V \cap V_0$. L'ensemble $T_{\lambda_0}\left(\complement V_1\right)$ est fermé; il existe donc un voisinage disqué de o dans E, soit W, tel que :

$$W \cap \left\{T_{\lambda_0}\left(\complement V_1\right) + W\right\} = \emptyset.$$

Considérons la couronne $C_1 = \left(\complement V_1\right) \cap 2V_1$; il existe un voisinage u de λ_0 tel que, pour $\lambda \in u$, on ait :

$$(T_\lambda - T_{\lambda_0})(C_1) \subset (T_\lambda - T_{\lambda_0})(2V_1) \subset W.$$

Donc, pour $\lambda \in u$, on a :

$$T_\lambda(C_1) \subset T_{\lambda_0}\left(\complement V_1\right) + W,$$

ce qui entraîne;

$$(1) \qquad W \cap T_\lambda(C_1) = \emptyset.$$

Or, toute droite d'origine o rencontre C_1, ce qui prouve d'abord que $\overset{-1}{T}_\lambda(o) = (o)$ pour $\lambda \in u$: sinon, il existerait un $x \in C_1$, tel que $T_\lambda x = o$, et ceci contredirait (1).

De plus, W étant disqué, on a :

$$(2) \qquad W \cap T_\lambda\left(\complement V_1\right) = \emptyset;$$

sinon, il existerait un $x \in W$, tel que $x = T_\lambda y$, $y \in \complement V_1$; donc, pour un $\alpha \in C$, on aurait $\frac{1}{\alpha} y \in C_1$, $\frac{1}{\alpha} x \in T_\lambda(C_1)$ et $\frac{1}{\alpha} x \in W$, ce qui contredirait encore (1).

De la relations (2), on tire bien :

$$(3) \quad W \cap T_\lambda(E) \subset T_\lambda(V) \quad \text{pour} \quad \lambda \in u, \quad \text{car} \quad V \supset V_1.$$

Lemme B. — *Si* $\{T_\lambda\}$ *satisfait à* (O) *et* (C), *et si* T_{λ_0} *est un isomorphisme de* E *sur* E, *l'application* $\lambda \to T_\lambda^{-1}$ *est s-continue en* λ_0, *s désignant la topologie de la convergence simple pour les transformations continues de* E *dans lui-même.*

En effet, le résultat de (A) prouve, puisque T_λ est un isomorphisme au voisinage de λ_0, que, pour tout voisinage V de o, il existe un voisinage u de λ_0 et un voisinage W de o, tels que :

$$T_\lambda(V) \supset W \qquad \text{pour} \qquad \lambda \in u.$$

Or, soit $x \in E$; si λ est assez voisin de λ_0, on a :

$$T_\lambda(T_{\lambda_0}^{-1} x) - T_{\lambda_0}(_{\lambda_0}^{-1} x) \in W,$$

car T_λ elle-même est visiblement s-continue, donc :

$$x - T_\lambda T_{\lambda_0}^{-1} x \in T_\lambda(V)$$

si λ est assez voisin de λ_0, et :

$$T_\lambda^{-1} x - T_{\lambda_0}^{-1} x \in V,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Lemme C. — *Si* $\{T_\lambda\}$ *satisfait* (O) *et* (C), *au voisinage de tout point* λ_0 *de* Λ *où* T_{λ_0} *possède une inverse à gauche, on peut choisir l'inverse à gauche* V_λ *de* T_λ *de telle sorte que* $\lambda \to V_\lambda$ *soit continue en* λ_0, *au sens de la topologie de la convergence simple s.*

T_{λ_0} possède une inverse à gauche continue V_{λ_0}, et $\chi(\lambda_0) = -n$, n entier non-négatif. Dans un voisinage u de λ_0, $\chi(\lambda) = \chi(\lambda_0) = -n$ et :

$$T_\lambda = T_{\lambda_0} + (T_\lambda - T_{\lambda_0}) = [I + (T_\lambda - T_{\lambda_0}) V_{\lambda_0}] T_{\lambda_0}$$

possède aussi une inverse continue à gauche.

La famille $U_\lambda = I + (T_\lambda - T_{\lambda_0}) V_{\lambda_0}$ satisfait encore visiblement (C), et $\chi(U_\lambda) = 0$ pour $\lambda \in u$. Nous allons même montrer que U est un isomorphisme de E sur E, dans un voisinage $u' \subset u$ de λ_0.

Le sous-espace de dimension n :

$$M = \overset{-1}{V}_{\lambda_0}(0)$$

est un supplémentaire de $T_{\lambda_0}(E)$; nous allons montrer que M est supplémentaire de $T_\lambda(E)$ lorsque λ est assez voisin de λ_0. Puisque, pour $\lambda \in u$, $T_\lambda(E)$ est de codimension n, il suffit de montrer que, si M est un sous-espace de dimension finie, indépendant de $T_{\lambda_0}(E)$, il existe un voisinage de λ_0 où $T_\lambda(E)$ et M sont indépendants.

En effet, $T_{\lambda_0}(\overline{V_0})$ est fermé et, pour $\lambda \in u'$, u' voisinage convenable de λ_0, on a :

$$T_{\lambda_0}(\overline{V_0}) \supset W \cap T_\lambda(E),$$

où W est un certain voisinage de 0 dans E. Choisissons le voisinage W' de 0 de telle sorte que :

$$W' + W' \subset W$$

$W' \cap M$ est relativement compact.

Alors, l'ensemble $(2W') \cap M \cap \complement W'$ est relativement compact et ne rencontre pas $T_{\lambda_0}(\overline{V_0})$, si bien qu'il existe un voisinage W'' de 0 dans E tel que :

$$\{T_{\lambda_0}(\overline{V_0}) + W''\} \cap \{M \cap (2W') \cap \complement W' + W''\} = \emptyset.$$

Mais ceci implique l'existence d'un voisinage $u'' \subset u'$ tel que :

$$T_\lambda(\overline{V_0}) \cap (2W') \cap M \cap \complement W' = \emptyset \qquad \text{pour} \qquad \lambda \in u'',$$

donc :

$$T_\lambda(E) \cap M \cap \left(2W' \cap \complement W'\right) = \emptyset,$$

et finalement :

$$T_\lambda(E) \cap M = \emptyset.$$

Il existe donc un voisinage de λ_0, appelons-le u', tel que $\overset{-1}{V}_{\lambda_0}(o)$ est un supplémentaire de $T_\lambda(E)$ pour $\lambda \in u'$. On peut donc choisir V_λ en chaque point de u' pour que :

$$\overset{-1}{V}_\lambda(o) = \overset{-1}{V}_{\lambda_0}(o).$$

Mais $I = V_\lambda T_\lambda = (V_\lambda U_\lambda)T_{\lambda_0}$, donc $V_\lambda U_\lambda$ est inverse de T_{λ_0} et annule les mêmes vecteurs que V_{λ_0}, si bien que : $V_\lambda U_\lambda = V_{\lambda_0}$.

Il en résulte que $\overset{-1}{U}_\lambda(o) \subset \overset{-1}{V}_{\lambda_0}(o)$, donc $\overset{-1}{U}_\lambda(o) = (o)$ pour $\lambda \in u'$, car les vecteurs de $\overset{-1}{V}_{\lambda_0}(o)$ sont visiblement invariants par les transformations :

$$x \to U_\lambda x = x + (T_\lambda - T_{\lambda_0})V_{\lambda_0}x.$$

Ainsi, $\mu(U_\lambda) = o$ et $\mu^*(U_\lambda) = o$ pour $\lambda \in u'$. D'après le lemme A, U_λ est donc un isomorphisme de E sur E pour $\lambda \in u'$, puisque $U_{\lambda_0} = I$. D'autre part, $\{U_\lambda\}_{\lambda \in u'}$, satisfait bien à (O) et (C) ; mettons donc V_λ sous la forme :

$$V_\lambda = V_{\lambda_0} U_\lambda^{-1};$$

U_λ^{-1} est s-continue, donc aussi V_λ.

Le lemme C est donc démontré. Nous utiliserons par la suite une proposition en réalité un peu moins forte que ce qui est énoncé en C :

On peut choisir V_λ *de telle sorte que les applications* $\lambda \to \langle V_\lambda x, y\rangle$ *de* Λ *dans* C *soient toutes continues, quand* $x \in E$ *et* $y \in E'$.

4. 4. Nous allons maintenant considérer un ouvert Λ du plan complexe. Rappelons que la topologie s de la convergence simple est compatible avec la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des transformations linéaires continues de E dans E. La transformation T_λ étant définie dans Λ, on pourra dire que T_λ est *s-dérivable* en un point λ_0 si le quotient différentiel tend vers une limite, au sens de la topologie s, lorsque λ tend vers λ_0 dans Λ.

Lemme. — *Soit maintenant* Λ *un ouvert du plan complexe,* $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *une famille qui satisfait à* (O) *et* (C), *et de plus s-dérivable. Alors on peut choisir* l'inverse V_λ de T_λ pour que $\lambda \to \langle V_\lambda x, y\rangle$ *soit une application analytique de* Λ *dans* C, *pour* $x \in E$ *et* $y \in E'$.

Puisque T_λ est s-dérivable, le quotient $\dfrac{1}{\lambda - \lambda_0}(T_\lambda - T_{\lambda_0})x$ a une limite déterminée $A_{\lambda_0}x$ lorsque λ tend vers λ_0, et A_{λ_0} est une transformation linéaire continue de E dans E.

Considérons le quotient analogue pour T_λ^{-1}, lorsque T_{λ_0} est un isomorphisme, et λ voisin de λ_0. Il a une limite; en effet, il s'écrit:

$$\frac{1}{\lambda-\lambda_0}(T_\lambda^{-1}-T_{\lambda_0}^{-1})x = T_\lambda^{-1}\left[\frac{1}{\lambda-\lambda_0}(T_{\lambda_0}-T_\lambda)\right]T_{\lambda_0}^{-1}x,$$

et il faut montrer que, si V est un voisinage de o dans E, on a:

$$T_\lambda^{-1}\left[\frac{1}{\lambda-\lambda_0}(T_\lambda-T_{\lambda_0})\right]T_{\lambda_0}^{-1}x - T_{\lambda_0}^{-1}A_{\lambda_0}T_{\lambda_0}^{-1}x \in V$$

pour λ assez voisin de λ_0; or ceci équivaut à:

$$\left[\frac{1}{\lambda-\lambda_0}(T_\lambda-T_{\lambda_0})\right]T_{\lambda_0}^{-1}x - T_\lambda T_{\lambda_0}^{-1}A_{\lambda_0}T_{\lambda_0}^{-1}x \in T_\lambda(V);$$

pour $|\lambda-\lambda_0|$ assez petit, il existe un voisinage W_1 de o tel que:

$$W_1 + W_1 \subset T_\lambda(V).$$

Il suffit donc de prendre $|\lambda-\lambda_0|$ assez petit pour que:

$$\frac{1}{\lambda-\lambda_0}(T_\lambda-T_{\lambda_0})(T_{\lambda_0}^{-1}x) - A_{\lambda_0}(T_{\lambda_0}^{-1}x) \in W_1$$

et

$$(T_\lambda-T_{\lambda_0})T_{\lambda_0}^{-1}A_{\lambda_0}(T_{\lambda_0}^{-1}x) \in W_1.$$

Par conséquent, T_λ^{-1} est *s*-dérivable lorsque T_{λ_0} est un isomorphisme de E sur E.

Pour un point λ_0 où T_{λ_0} a une inverse à gauche (et où l'indice est fini) nous avons vu que, dans un voisinage de λ_0, on pouvait prendre :

$$V_\lambda = V_{\lambda_0}U_\lambda^{-1};$$

U_λ étant *s*-dérivable, et étant un isomorphisme de E sur E, V_λ est aussi *s*-dérivable.

Enfin, la *s*-dérivabilité de V_λ entraîne, puisque $\Lambda \subset C$, la dérivabilité, donc l'analyticité, de

$$\lambda \to \langle V_\lambda x, y\rangle, \qquad x \in E, \qquad y \in E'.$$

Remarque. — La démonstration précédente fait aussi apparaître la possibilité de traiter le cas de plusieurs paramètres complexes, c'est-à-dire le cas d'un ouvert Λ dans C^n. Les résultats de ce chapitre seraient à modifier pour un tel cas, en tenant compte de l'analyticité de T_λ par rapport à des paramètres complexes ou une partie d'entre eux.

Familles de transformations de rang fini.

4. 5. Lemme. — *Soit* Λ *un espace topologique,* $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *une famille de transformations linéaires;*

$$T_\lambda = I - L_\lambda, \qquad L_\lambda x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, y_{i\lambda}\rangle x_{i\lambda}.$$

Si toutes les applications $\lambda \to \langle x_{i\lambda}, y_{j\lambda}\rangle$ *sont continues, l'entier* $\mu(\lambda)$ *est minimum dans un ouvert de* Λ.

Pour la famille $\{T_\lambda\}$, on a $\chi(\lambda) = \chi(I) = 0$ dans tout Λ. L'étude de l'équation :

$$T_\lambda x = 0, \tag{1}$$

ou :

$$x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, y_{i\lambda}\rangle x_{i\lambda} = 0$$

se ramène aisément, par produit scalaire par chaque $y_{i\lambda}$, à un système numérique :

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_j - \sum_{i=1}^{n} \rho_i \langle x_{i\lambda}, y_{j\lambda}\rangle = 0. \\ \rho_i = \langle x, y_{i\lambda}\rangle, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \\ x = \sum_{i=1}^{n} \rho_i x_{i\lambda}. \end{array}\right. \tag{2}$$

Le déterminant $\delta(\lambda) = \text{Dét}[\delta_{ij} - \langle x_{i\lambda}, y_{j\lambda}\rangle]$, ainsi que tout ceux que l'on peut tirer du tableau :

$$|\delta_{ij} - \langle x_{i\lambda}, y_{j\lambda}\rangle|$$

sont des fonctions continues de λ. Le nombre des solutions indépendantes de (2), au maximum n, est égal au nombre des relations indépendantes entre les $\langle x_{i\lambda}, y_{j\lambda}\rangle$ en chaque point $\lambda \in \Lambda$. Ces relations correspondent à l'annulation de fonctions continues de λ, donc chacune d'elles est vérifiée dans un fermé de Λ. Soit μ le nombre de ces relations s'annulant sur tout Λ; alors $\mu(\lambda) \geqslant \mu$ en tout point de Λ, et il existe des points de Λ où $\mu(\lambda) = \mu$; μ est le minimum de $\mu(\lambda)$ sur Λ. L'ensemble des points où $\mu(\lambda) = \mu$ est d'ailleurs ouvert, car l'ensemble des points où $\mu(\lambda) > \mu$ est une intersection finie d'ensembles fermés.

4. 6. Lemme. — *Soit* Λ *un ouvert du plan complexe,* $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *une famille:*

$$T_\lambda = I - L_\lambda, \qquad L_\lambda x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, y_{i\lambda}\rangle x_{i\lambda}.$$

Si toutes les applications $\lambda \to \langle x_{i\lambda}, y_{j\lambda}\rangle$ *sont analytiques, alors* $\mu(\lambda)$ *est minimum dans un ouvert de* Λ *dont le complémentaire est discret (ou vide).*

Avec les notations du paragraphe 4. 5., les relations indépendantes entre les $\langle x_{i\lambda}, y_{j\lambda}\rangle$ s'expriment par l'annulation de fonctions numériques analytiques de λ. Elles ont lieu sur des ensembles de points isolés dans Λ, ou sur tout Λ (s'il est connexe). Si μ est le nombre des relations qui ont lieu dans tout Λ, les points où $\mu(\lambda) > \mu$ forment un ensemble qui est réunion finie d'ensembles isolés dans Λ, donc est aussi un ensemble isolé. Il peut évidemment ne pas y avoir de tels points.

Ensembles de Noether.

4. 7. Proposition. — *Soit* Λ *un espace topologique,* $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *une famille de transformations linéaires continues de l'espace vectoriel topologique séparé* E *dans lui-même, satisfaisant à* (C) *et* $(\overline{O})$.

Alors:

1° *L'ensemble de Noether* N *est ouvert, et* $\chi(\lambda) = \chi_i$ *est constant sur chaque composante* N_i *de* N.

2° *Au voisinage de tout point* $\lambda_0 \in N_i$, $\mu(\lambda)$ *reste au plus égal à* $\mu(\lambda_0)$. *En particulier, l'ensemble des points de* N_i *où* $\mu(\lambda)$ *est minimum est un ouvert* O_i.

Soit τ la topologie de E.

La famille $\{T_\lambda\}$ se trouve dans les conditions du lemme 4. 2., donc N est ouvert et $\chi(\lambda) = \chi_i = \text{Cte}$ sur chaque composante connexe N_i de N.

Considérons une composante particulière N_i. A chaque point λ de N_i attachons l'entier $\mu(\lambda)$. Soit $\lambda_0 \in N_i$, on a :

$$(1) \qquad T_\lambda = U_\lambda + L,$$

où U_λ a une inverse à gauche (par exemple) continue, dans tout un voisinage u de λ_0; soit V_λ cette inverse, que l'on peut supposer telle que :

$$(2) \qquad V_\lambda^{-1}(0) = V_{\lambda_0}^{-1}(0) \qquad \text{(lemme 4.3.C)}.$$

L est de rang fini, et :

$$(3) \qquad V_\lambda T_\lambda = I + V_\lambda L.$$

Il est loisible de supposer (3. 6.) que L est choisie de telle manière que :

$$(4) \qquad T_{\lambda_0}\left[\overset{-1}{L}(o)\right] = T_{\lambda_0}(E), \qquad U_{\lambda_0}(E) = T_{\lambda_0}(E) \underset{\mp}{\oplus} L(E),$$

c'est-à-dire que $\overset{-1}{V}_{\lambda_0}(o) \cap T_{\lambda_0}(E) = (o)$. Dans tout le voisinage u de λ_0 où U_λ est inversible à gauche continûment, on a d'ailleurs :

$$(5) \qquad \overset{-1}{T}_\lambda(o) \cap \overset{-1}{L}(o) \subset \overset{-1}{U}_\lambda(o) = (o),$$

donc :

$$(6) \qquad \mu(\lambda) \leqslant \mu(\lambda_0),$$

car $\overset{-1}{L}(o)$ est de codimension égale à $\mu(\lambda_0)$.

Soit O_ι l'ensemble des points de N_ι où $\mu(\lambda)$ atteint son minimum μ_ι. Soit $\lambda_0 \in O_\iota$, quelconque. Au voisinage de λ_0, on doit avoir (6), par conséquent $\mu(\lambda) = \mu(\lambda_0) = \mu_\iota$ dans tout u; O_ι est donc ouvert.

Remarque. — Soit F_ι le complémentaire de O_ι dans N_ι, fermé dans N_ι; soit $N_\iota^{(2)}$ son intérieur, s'il n'est pas vide, $\mu(\lambda)$ atteint son minimum $\mu_\iota^{(2)}$ dans $N_\iota^{(2)}$ sur un ouvert $O_\iota^{(2)}$. Soit $F_\iota^{(2)}$ le complémentaire de $O_\iota^{(2)}$ dans $N_\iota^{(2)}$, $N_\iota^{(3)}$ l'intérieur de $F_\iota^{(2)}$; on peut recommencer cette opération sur $N_\iota^{(3)}$, etc. On obtient ainsi *une suite d'ouverts disjoints* $O_\iota^{(j)}$, $O_\iota^{(1)} = O_\iota$, *où* $\mu(\lambda)$ *reste constant:*

$$\mu(\lambda) = \mu_\iota^{(j)}, \qquad \mu_\iota^{(1)} = \mu < \mu_\iota^{(2)} < \cdots < \mu_\iota^{(n)} < \cdots$$

et le complémentaire F'_ι *de leur réunion est un ensemble fermé nulle part dense dans* N_ι, *dont chaque point est point-frontière d'un nombre fini des* $O_\iota^{(j)}$ (à cause de la conditions (6) appliquée à ce point, $\mu(\lambda)$ ne pouvant être infini en un point de N_ι).

4. 8. Proposition. — *Soit* Λ *un ouvert du plan complexe et* $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, *une famille satisfaisant à* (C) *et* $(\overline{O})$. *Si* T_λ *est s-dérivable dans* Λ, *alors:*

Dans chaque N_i, *le complémentaire de* O_i *est un ensemble discret.*

Considérons un point-frontière de F_ι, le complémentaire de O_i dans N_i, soit λ_0. Il existe une suite de points $\lambda_n \in O_i$, $\lambda_n \to \lambda_0$.

La codimension de $T_{\lambda_0}(E)$ est $\mu(\lambda_0) + \chi_i$; celle de $T_{\lambda_n}(E)$, $n \geqslant 1$, est $\mu_i + \chi_i$. Il existe donc un sous-espace M de dimension χ_i qui est indépendant de chacun des $T_{\lambda_n}(E)$, $n \geqslant 0$. Prenons V_{λ_0} telle que $\overset{-1}{V}_{\lambda_0}(o) = M$; on a :

$$(7) \qquad \overset{-1}{V}_{\lambda_0}(o) \cap T_{\lambda_n}(E) = (o), \qquad n \geqslant 0.$$

D'après (3) :

$$(8) \quad \mu(V_\lambda T_\lambda) = \mu(I + V_\lambda L) = \mu(\lambda) + \dim\left[\overline{V}_\lambda^{1}(0) \cap T_\lambda(E^*)\right]$$

dans tout un voisinage u de λ_0. Soit m tel que $\lambda_k \in u$ pour $k \geqslant m$. On a :

$$(9) \quad \begin{cases} \mu(\lambda_0) = \mu(I + V_{\lambda_0} L) > \mu_i, \\ \mu_i \leqslant \mu(\lambda) \leqslant \mu(I + V_\lambda L) \qquad \text{si} \qquad \lambda \in u, \\ \mu(\lambda_k) = \mu(I + V_{\lambda_k} L) = \mu_i \qquad \text{pour} \qquad k \geqslant m \quad [(7) \text{ et } (8)]. \end{cases}$$

Donc la famille $\{I + V_\lambda L\}_{\lambda \in u}$, qui est à coefficients analytiques comme dans le lemme 4. 6., doit être telle que :

$$(10) \quad \begin{cases} \mu(I + V_{\lambda_0} L) = \mu(\lambda_0) > \mu_i, \\ \mu(I + V_\lambda L) = \mu_i \qquad \text{si} \qquad \lambda \in u, \quad \lambda \neq \lambda_0. \end{cases}$$

Des relations (9) et (10), on tire alors :

$$(11) \quad \begin{cases} \mu(\lambda_0) > \mu_i, \\ \mu(\lambda) = \mu_i \qquad \text{si} \qquad \lambda \in u. \quad \lambda \neq \lambda_0. \end{cases}$$

Par conséquent, F_i a tous ses points frontières isolés; il se réduit donc à ces points isolés, puisque son complémentaire O_i dans l'ensemble connexe N_i est non vide.

Nous dirons que la famille $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ est *permutable* si quels que soient λ, $\mu \in \Lambda$, toute transformation qui est permutable à T_λ est permutable à T_μ (ceci entraîne, en particulier, que deux transformations quelconques de la famille sont permutables).

4. 9. Appelons *ensemble résolvant* de $\{T_\lambda\}$ l'ensemble des points où T_λ est un isomorphisme de E sur E, *spectre* de $\{T_\lambda\}$ son complémentaire.

Proposition. — *Soit Λ un ouvert du plan complexe, $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ une famille permutable, satisfaisant* (C) *et* $(\overline{O})$, *et s-dérivable. Dans chaque composante N_i, les points où T_λ possède des chaînes finies sont les points de l'ensemble isolé complémentaire de O_i; le nombre des chaînes infinies indépendantes est le même en tout point de N_i.*

En particulier, les points de Riesz de T_λ sont exactement les points des composantes N_i de N qui rencontrent l'ensemble résolvant; les points de Riesz qui appartiennent au spectre en sont des points isolés.

Considérons d'abord un point $\lambda_0 \in N_i$ où T_{λ_0} possède des chaînes finies. Il existe une transformation de rang fini L telle que :

$$T_{\lambda_0} = T_\lambda^{(1)} + L,$$

$T^{(1)}_{\lambda_0}$ a les mêmes chaînes infinies que T_{λ_0}, T_λ et L sont permutables, car T_{λ_0} et L le sont. On a :

$$\begin{cases} \mu(T^{(1)}_{\lambda_0}) < \mu(T_{\lambda_0}) & (1) \\ \mu(T^{(1)}_{\lambda}) \leqslant \mu(T^{(1)}_{\lambda_0}) & (2) \end{cases}$$

parce que λ est point de Noether de $T^{(1)}_\lambda$ aussi, au voisinage de λ_0.

Si L a été construite comme en 3. 3., puisque $T^{(1)}_\lambda$ et L sont permutables, on a deux sous-espaces $\overset{-1}{L}(0)$ et $L(E)$, supplémentaires dans E, que $T^{(1)}_\lambda$ applique dans eux-mêmes.

Pour $\lambda \neq \lambda_0$, supposons que $T_\lambda x = 0$. Décomposons x en $u \in \overset{1}{L}(0)$ et $v \in L(E)$: $x = u + v$. On a $T^{(1)}_\lambda x = -Lx$, donc :

$$T^{(1)}_\lambda u + T^{(1)}_\lambda v = -Lv$$

ou :

$$T^{(1)}_\lambda u = -T_\lambda v.$$

Par conséquent, $T^{(1)}_\lambda u = 0$ et $T_\lambda v = 0$, c'est-à-dire $v = 0$, $x = u \in \overset{-1}{L}(0)$. D'une part, T_λ n'annule pas de vecteur non nul de $\overset{-1}{L}(0)$, si $\lambda \neq \lambda_0$; d'autre part :

$$\mu(T_\lambda) = \mu(T^{(1)}_\lambda) \qquad \text{pour} \qquad \lambda \neq \lambda_0. \tag{3}$$

De (1) (2) (3), et de la proposition 4. 8. résulte alors que $\mu(\lambda)$ est constant au voisinage de λ_0 (sauf en λ_0), avec

$$\mu(\lambda) < \mu(\lambda_0), \qquad \mu(\lambda) = \mu_i \tag{4}$$

ce qui prouve que λ_0 est un point du complémentaire F_i de O_i.

Par conséquent : tout point où T_λ possède des chaînes finies est un point de F_i; en tout point de O_i, T_λ ne possède pas de chaîne finie. Il reste à prouver que T_λ possède des chaînes finies en tout point de F_i.

Mais nous avons vu que, si $\lambda_0 \in F_i$, c'est un point isolé à plus grand nombre de zéros pour :

$$V_\lambda T_\lambda = I + V_\lambda L, \qquad \text{où} \qquad T_\lambda = U_\lambda + L, \qquad V_\lambda U_\lambda = I.$$

Donc, pour $\lambda = \lambda_0$, $I + V_\lambda L$ peut se mettre sous la forme :

$$I + V_{\lambda_0} L = I + V_{\lambda_0} L_1 + V_{\lambda_0} L_2,$$

où $V_{\lambda_0} L_2$ est permutable à $(I + V_{\lambda_0} L_1)$, et $L_2 \neq 0$, avec

$$\mu(I + V_{\lambda_0} L_1) = \mu_i.$$

Mais ceci est équivalent à :

$$U_{\lambda_0} + L = U_{\lambda_0} + L_1 + L_2,$$

où L_2 et $(U_{\lambda_0} + L_1)$ sont permutables. Donc T_{λ_0} possède $\mu(\lambda_0) - \mu_i$ chaînes finies.

La deuxième partie du théorème est alors immédiate. Si N_i rencontre l'ensemble résolvant, tous les points de O_i sont tels que $\mu(\lambda) = 0$, $\chi(\lambda) = 0$; ce sont donc des points de l'ensemble résolvant. Les points de F_i sont alors des points où T_λ possède des chaînes finies, et pas de chaîne infinie, c'est-à-dire des points de Riesz.

Inversement, si N_i contient un point de Riesz du spectre, c'est un point de F_i, et tout point de O_i est un isomorphisme de E sur E, donc un point de l'ensemble résolvant.

Application à des familles d'un espace de Banach.

4. 10. Désignons par $\mathcal{L}$ l'espace vecoriel normé des transformations linéaires continues de E dans E, lorsque E est un espace de Banach.

THÉORÈME. — *Soit* E *un espace de Banach,* Λ *un espace topologique,* $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *une famille de transformations linéaires continues de* E *dans* E*; on suppose que* $\lambda \to T_\lambda$ *est une application continue de* Λ *dans* $\mathcal{L}$. *Alors* $\{T_\lambda\}$ *satisfait à* (C) *et* $(\overline{O})$ *et par suite les conclusions de la proposition* 4. 7. *sont valables pour son ensemble de Noether* N.

a) $\{T_\lambda\}$ *satisfait à* (C) : Soit $\lambda_0 \in \Lambda$. Montrons que, si V_0 est la boule $\|x\| \leqslant 1$ dans E, et W la boule $\|x\| \leqslant \rho$, on a $(T_\lambda - T_{\lambda_0})(V_0) \subset W$ si λ appartient à un voisinage de λ_0; puisque T_λ est continue au sens de la norme dans $\mathcal{L}$ c'est qu'il existe toujours un voisinage u de λ_0 tel que :

$$\|T_\lambda - T_{\lambda_0}\| \leqslant \rho \qquad \text{si} \qquad \lambda \in u,$$

donc :

$$\|(T_\lambda - T_{\lambda_0})(x)\| \leqslant \rho \qquad \text{si} \qquad \|x\| \leqslant 1.$$

b) $\{T_\lambda\}$ *satisfait à* $(\overline{O})$: il suffira de montrer que $\{T_\lambda\}$ satisfait à (O).

Or, si λ_0 est un point où, par exemple, T_{λ_0} possède une inverse à gauche continue V_{λ_0}, on a :

$$T_\lambda = T_{\lambda_0} + (T_\lambda - T_{\lambda_0}) = [1 + (T_\lambda - T_{\lambda_0})V_{\lambda_0}]\, T_{\lambda_0},$$

et la transformation $[I + (T_\lambda - T_{\lambda_0})V_{\lambda_0}]$ est un isomorphisme de E sur E dans tout le voisinage u de λ_0 pour lequel :

$$\|T_\lambda - T_{\lambda_0}\| \leqslant 1/\|V_{\lambda_0}\|.$$

Donc, pour $\lambda \in u$, T_λ est le produit d'un isomorphisme de E sur E par T_{λ_0}, c'est donc une transformation continuement inversible à gauche, de même indice que T_{λ_0}. $\{T_\lambda\}$ satisfait à (O) ; si L est continue, toute famille $\{T_\lambda - L\}$ est continue au sens de la norme dans $\mathcal{L}$, donc satisfait à (O) également.

4. 11. THÉORÈME. — *On suppose de plus que* Λ *est un ouvert du plan complexe, et que* $\lambda \to T_\lambda$ *est analytique. Alors, dans chaque* N_i, *l'ensemble complémentaire de* O_i *est discret.*

En effet, $\{T_\lambda\}$ satisfait bien aux conditions de la proposition 4. 8., puisque l'analyticité de $\lambda \to T_\lambda$ entraîne bien sa s-dérivabilité.

4. 12. THÉORÈME. — *Dans les conditions de* 4. 11., *si de plus la famille* $\{T_\lambda\}$ *est permutable, alors le nombre des chaînes infinies est le même,* μ_i, *dans chaque composante* N_i, *et les conclusions de* 4. 9. *sont valables.*

Ce qui résulte immédiatement de 4. 9., 4. 10., 4. 11.

COROLLAIRE (Gohberg, Kračkovskii). — *Si* A *est une transformation linéaire continue de* E *dans* E, *la famille* $\{I - \lambda A\}$, *où* λ *décrit le plan complexe, a un ensemble de Noether ouvert, dont les points ont toutes les propriétés énoncées en* 4. 7., 8. 9.

Application au cas où T_λ ne diffère d'un isomorphisme que par une transformation compacte; problème d'Atkinson.

4. 13. THÉORÈME. — *Soit* E *un espace vectoriel topologique séparé,* Λ *un espace topologique,* $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *une famille de transformations satisfaisant à* C, *telle que* $T_\lambda - I$ *soit compacte pour chaque* $\lambda \in \Lambda$. *Alors:* 1° *tout point de* Λ *est point de Riesz de* T_λ; 2° *au voisinage de chaque point* $\lambda_0 \in \Lambda$, $\mu(\lambda) \leqslant \mu(\lambda_0)$, *et par suite dans chaque composante connexe de* Λ, $\mu(\lambda)$ *est minimum sur un ouvert.*

En tout point de Λ, $T_\lambda = I + A_\lambda$, où A_λ est compacte, donc T_λ est un R-homomorphisme d'après 3. 9. N est donc tout Λ.

Montrons que $\{T_\lambda\}$ satisfait à (O); il en sera alors de même de $\{T_\lambda - L\}$, où L est une transformation de rang fini continue quelconque puisque L est alors compacte.

Or, si T_{λ_0} possède une inverse continue, puisque $\{T_\lambda\}$ satisfait à (C), T_λ est un isomorphisme de E sur $T_\lambda(E)$ dans un voisinage de λ_0, donc est encore un isomorphisme de E sur E, puisque $\chi(\lambda) = 0$.

La proposition 4. 7. s'applique donc à $\{T_\lambda\}$.

4. 14. THÉORÈME. — *Dans les conditions du théorème* 4. 13., *si de plus* Λ *est un ouvert de plan complexe et* T_λ *est s-dérivable, dans chaque composante connexe de* Λ, *le complémentaire de l'ensemble ouvert de* 4. 13. *est discret.*

Car 4. 8. s'applique alors à $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

COROLLAIRE (Problème d'Atkinson). — *Soit* E *un espace vectoriel topologique séparé,* T_λ *un polynôme en* λ *à coefficients compacts, sauf le terme constant* T_0 *qui est un isomorphisme de* E *sur* E. *Alors* T_λ *est un isomorphisme de* E *sur* E, *quel que soit* λ *complexe, sauf éventuellement en des points isolés* λ_n, *qui sont des points de Riesz.*

Montrons que $\{T_\lambda\}$ satisfait à (C) : $T_\lambda - T_{\lambda_0} = \sum_{p=1}^{n} (\lambda - \lambda_0)^p A_p$ et il existe un voisinage de o tel que $A_p(V_0) \subset K_p$, K_p compact. Donc, si $|\lambda - \lambda_0| < \rho$, $(T_\lambda - T_{\lambda_0})(V_0) \subset \sum_{p=1}^{n} \bigcup_{|\alpha| \leqslant \rho} \alpha K_p$, qui est compact. Il en résulte que $(T_\lambda - T_{\lambda_0})(V_0) \subset W$, W étant un voisinage quelconque de o dans E, pourvu que ρ soit assez petit.

$\{T_\lambda\}$ satisfait donc aux conditions de 4. 8., 4. 13., et le minimum de $\mu(\lambda)$ est o, puisque T_0 est un isomorphisme par hypothèse. Enfin, Λ est tout le plan complexe, donc N possède une seule composante qui est le plan tout entier.

Application à des transformations bornées.

4. 15. Soit E un espace vectoriel topologique séparé, T_λ un polynôme en λ, λ complexe, dont les coefficients sont des transformations bornées de E dans E, sauf le premier T_0 qui un est isomorphisme. *La famille* $\{T_\lambda\}$ *satisfait à* (C)*:* en effet,

$$T_\lambda - T_{\lambda_0} = \sum_{p=1}^{n} (\lambda - \lambda_0)^p A_p$$

et :

$$A_p(V_0) \subset B_p, \qquad B_p \text{ borné.}$$

On a donc le résultat par le même raisonnement qu'en 4. 14., les ensembles bornés remplaçant les compacts.

La famille est s-dérivable, comme toute famille $\{T_\lambda\}$ pour laquelle T_λ est un polynôme dont les coefficients sont des transformations continues de E dans E.

On pourra donc appliquer à $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ les résultats de 4. 7. et 4. 8., dans chaque ouvert Λ du plan complexe où l'on aura reconnu que cette famille satisfait à $(\overline{O})$, ce qui peut se faire de plusieurs façons :

a) Nous avons vu que si les Λ_p, $p \geqslant 1$, sont compacts, il en est ainsi dans tout le plan; plus généralement, si $\chi(\lambda) = 0$ dans un

ouvert Λ contenant l'origine, $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ satisfait les conditions de 4. 8. et 4. 7., avec $N = \Lambda$.

Si $\chi(\lambda)$ est constant dans un ouvert Λ, par exemple $\chi(\lambda) = -n$, il en est de même de $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, avec $N = \Lambda$.

b) Dans un espace de Banach, si $\{T_\lambda\}$ satisfait à (C), la transposée $\{T'_\lambda\}$ y satisfait aussi, en considérant la topologie définie par la norme dans E'. Alors $\{T_\lambda\}$ satisfait aussi à (O), en appliquant le lemme 4. 3. à $\{T_\lambda\}$ et $\{T'_\lambda\}$ simultanément; il en est de même de $\{T_\lambda - L\}$, L de rang fini, qui satisfait évidemment à (C) en même temps que $\{T_\lambda\}$. $\{T_\lambda\}$ satisfait donc à $(\overline{O})$. Ceci ne nous intéresse pas particulièrement pour l'espace de Banach, car nous disposons déjà de 4. 10. et 4. 11.

c) Si E est un espace topologique séparé quelconque, E' son dual, et s'il existe une topologie sur E' (compatible avec sa structure vectorielle) dans laquelle T'_λ est continue et $\{T'_\lambda\}$ satisfait à (C), les mêmes considérations seront valables pour l'ensemble de Noether de $\{T_\lambda\}$.

En particulier, *si* E *est un espace vectoriel topologique séparé, localement convexe et tonnelé, et si* $\{T_\lambda\}$ *est une famille de transformations linéaires* T_λ *qui sont les valeurs d'un polynôme en* λ *à coefficients bornés, sauf le premier* T_0 *qui est un isomorphisme de* E *sur* E, *l'ensemble de Noether de* $\{T_\lambda\}$ *a les propriétés indiquées en* 4. 7. *et* 4. 8.; une de ses composantes au moins, celle qui contient l'origine, est formée de points de l'ensemble résolvant, plus (éventuellement) un ensemble de points isolés λ_n.

En effet, (N. Bourbaki, [2], p. 87), si E est un espace tonnelé, E' son dual fort, les polaires des voisinages de o dans l'un d'eux fournissent un système fondamental de parties bornées dans l'autre, et inversement. Donc si A_p est une transformation linéaire continue dans E, et bornée, A'_p est fortement continue et bornée dans E'. La condition (C) est satisfaite, pour $\{T_\lambda\}$ dans E comme pour $\{T'_\lambda\}$ dans E'.

4. 16. Exemple simple d'application au cas de plusieurs paramètres. — Soit E un espace vectoriel topologique séparé, A, B, C, trois transformations linéaires compactes, λ, μ, ν, des paramètres complexes, et l'équation :

$$x - \lambda Ax - \mu Bx - \nu Cx = a, \quad a \in E. \tag{1}$$

Appliquons-lui le théorème 4. 10., puis appliquons le théorème 4. 11. à chaque équation déduite de (1) en fixant les valeurs de deux des paramètres λ, μ, ν. Nous obtenons : dans un ensemble ouvert $\mathcal{O}$

de C^3, contenant l'origine et dont le complémentaire $\mathcal{F}$ est coupé par chaque droite parallèle à l'un des axes et qui ne lui est pas contenue suivant un ensemble discret, (1) a une solution et une seule quel que soit $a \in E$; l'équation homogène ($a = 0$) et sa transposée n'ont pas de solution non nulle; en un point quelconque de $\mathcal{F}$ au contraire, ces équations homogènes ont le même nombre fini n de solutions linéairement indépendantes, et la condition nécessaire et suffisante pour que (1) ait une solution (donc n solutions) est que $\langle a, y \rangle = 0$ pout toute solution y de l'équation homogène associée.

Ceci s'applique à l'équation

$$(2)\quad \varphi(x_1, x_2) - \lambda \int_0^1 A(x_1, x_2, y)\varphi(y_1, x_2)\,dy - \mu \int_0^1 B(x_1, x_2, y)\varphi(x_1, y)\,dy$$
$$- \nu \int_0^1\int_0^1 C(x_1, x_2, y_1, y_2)\varphi(y_1, y_2)\,dy_1\,dy_2 = f(x_1, x_2),$$

dans l'espace de Banach $\mathcal{C}_{I\times I}$, $I = [0,1]$, avec $f \in \mathcal{C}_{I\times I}$, $A \in \mathcal{C}_{I\times I\times I}$, $B \in \mathcal{C}_{I\times I\times I}$, $C \in \mathcal{C}_{I\times I\times I\times I}$. (Cette équation a été étudiée en particulier par S. Fenyö [1]).

CHAPITRE V

POINTS DE RIESZ ET RAYON DE FREDHOLM

Réductions d'une transformation.

5. 1. Soient E un espace vectoriel topologique séparé, τ sa topologie, A une transformation linéaire continue de E dans E, telle que $\{T_\lambda = I - \lambda A\}$ satisfasse à (C) et $(\overline{O})$. L'ensemble de Noether de cette famille, que nous appellerons ensemble de Noether de A, est ouvert; sur chaque composante N_i, l'indice $\chi(\lambda) = \chi_i$ est constant; enfin le nombre μ_i des chaînes infinies indépendantes est constant dans N_i, et $\mu(\lambda) = \mu_i$, sauf éventuellement en des points isolés dans N_i, où par conséquent il existe des chaînes finies (proposition 4. 9.).

Considérons une composante N_i de N, et un point λ_0 où T_{λ_0} possède des chaînes finies. Selon 3. 4., il existe deux sous-espaces E_1 et E_2, tels que $T_{\lambda_0}(E_1) \subset E_1$, $T_{\lambda_0}(E_2) \subset E_2$, ce qui revient à :

$$A(E_1) \subset E_1, \qquad A(E_2) \subset E_2,$$

avec :

$$E = E_1 \underset{\tau}{\oplus} E_2,$$

et de plus E_1 est engendré par des chaînons de chaînes finies de T_{λ_0}.

Appelons Q_{λ_0} la projection continue sur E_1 parallèlement à E_2, L_{λ_0} la transformation de rang fini :

$$L_{\lambda_0} = AQ_{\lambda_0},$$

et posons :

$$A_{\lambda_0} = A - L_{\lambda_0} = A(I - Q_{\lambda_0}).$$

La famille $\{I - \lambda A_{\lambda_0}\}$ possède alors le même ensemble de Noether que $\{I - \lambda A\}$, puisque :

$$I - \lambda A_{\lambda_0} = (I - \lambda A) + \lambda L_{\lambda_0};$$

la transformation $I - \lambda_0 A_{\lambda_0}$ a pour noyau l'ensemble des origines de chaînes infinies pour $I - \lambda_0 A$ et n'a que des chaînes infinies (3. 3.).

On peut d'ailleurs écrire pour tout λ et pout tout entier n :

$$(I - \lambda A)^n = (I - \lambda A_{\lambda_0})^n (I - \lambda L_{\lambda_0})^n = (I - \lambda L_{\lambda_0})^n (I - \lambda A_{\lambda_0})^n,$$

à cause de l'orthogonalité de A_{λ_0} et L_{λ_0}; ce qui prouve, puisque $\{I - \lambda L_{\lambda_0}\}$ a visiblement pour seul point singulier le point λ_0, que $\{I - \lambda A_{\lambda_0}\}$ a le même ensemble de Noether que $\{I - \lambda A\}$, avec les mêmes nombres γ_j et μ_j dans chaque composante N_j, avec aussi les mêmes noyaux pour :

$$(I - \lambda A)^n \qquad \text{et} \qquad (I - \lambda A_{\lambda_0})^n,$$

n quelconque, en tous les points des N_j, sauf en $\lambda_0 \in N_i$, lequel est devenu un point sans chaîne finie pour $I - \lambda A_{\lambda_0}$.

5. 2. Nous exprimerons la situation précédente en disant que *la projection* Q_{λ_0} *réduit* A *en* λ_0, et que A_{λ_0} est *la réduction de* A *correspondante.* Nous avons donc :

PROPOSITION. — *Si* λ_0 *est un point de* N *où il existe des chaines finies, il existe une projection continue qui réduit* A *en* λ_0.

Définissons alors nos notations de la façon suivante : dans le cas général, attachons à λ_0 une des projections Q_{λ_0} qui réduisent A en λ_0; si λ_0 est un point de N sans chaîne finie, nous poserons $Q_{\lambda_0} = 0$; enfin, si nous considérons les *points de Riesz* de A, nous pouvons déterminer uniquement Q_{λ_0} par la condition d'être *la projection sur* $\overline{T}^{\nu}_{\lambda_0}(0)$ *parallèlement à* $T^{\nu}_{\lambda_0}(E)$, avec $\nu = \nu(T) = \nu^*(T)$; nous dirons alors que Q_{λ_0} *réduit normalement* A en λ_0, et que A_{λ_0} est *la réduction normale de* A en λ_0; cette réduction normale a l'avantage évident d'être unique.

Disque de Fredholm.

5. 3. Appelons *disque de Fredholm* de A le plus grand disque ouvert de centre 0 qui soit contenu dans N, et R_A son rayon. Ce disque est évidemment contenu dans la composante de N qui renferme l'origine, soit N_0. Il ne contient donc que des points de Riesz de A, c'est-à-dire des points de l'ensemble résolvant, plus, éventuellement, des points singuliers isolés qui sont des points de Riesz; c'est aussi le plus grand disque de centre 0 ne contenant que des points de Riesz de A.

D'après le théorème 4. 14., lorsque A est une transformation compacte de E dans E, son rayon de Fredholm est infini.

5. 4. Bornons-nous désormais au cas où E est un espace de Banach, et démontrons d'abord le lemme suivant.

LEMME. — *Supposons que la transformation* A *puisse s'écrire:* $A = A_1 + L$, *où* L *est de rang fini et où* $(I - \lambda_0 A)$ *a une inverse continue; si de plus* λ_0 *est un point singulier isolé de* A, *c'est un point de Riesz.*

En effet, λ_0 est un point de Noether de A, et il se trouve dans une composante de N qui rencontre l'ensemble résolvant de A. C'est donc un point de Riesz.

THÉORÈME. — *Soit* E *un espace de Banach,* $\mathfrak{L}$ *l'ensemble des transformations de rang fini continues de* E *dans* E, *et* $\mathfrak{A}$ *l'ensemble des transformations compactes de* E *dans* E. *Soit* A *une transformation linéaire continue de* E *dans* E, $\mathfrak{L}_A$ *et* $\mathfrak{A}_A$ *les sous-espaces respectifs de* $\mathfrak{L}$ *et* $\mathfrak{A}$ *formés de transformations permutables à* A. *On a :*

$$\begin{aligned} R_A &= \operatorname*{Sup}_{L \in \mathfrak{L}_A} \lim_{n \to \infty} \|(A - L)^n\|^{-1/n} = \operatorname*{Sup}_{L \in \mathfrak{L}} \lim_{n \to \infty} \|(A - L)^n\|^{-1/n} \\ &= \operatorname*{Sup}_{L \in \mathfrak{A}_A} \lim_{n \to \infty} \|(A - L)^n\|^{-1/n} = \operatorname*{Sup}_{L \in \mathfrak{A}} \lim_{n \to \infty} \|(A - L)^n\|^{-1/n}. \end{aligned}$$

Examinons d'abord les deux premières expressions données pour R_A dans cet énoncé; la première est certainement au plus égale à la seconde.

Montrons que R_A est au plus égal à la valeur de la première expression; soit ρ un nombre positif quelconque inférieur à R_A; dans le disque de rayon ρ centré sur l'origine, A n'a que des points réguliers et un nombre fini au plus de points singuliers qui sont des points de Riesz; on peut les ranger en une suite : $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; formons la réduction normale de A en λ_1, soit A_{λ_1}; puis la réduction normale de A_{λ_1} en λ_2, soit A'_{λ_2}, la réduction normale A'_{λ_3} de A'_{λ_2} en λ_3, etc. Nous obtenons :

$$A = A'_{\lambda_n} + \sum_{i=1}^{n} L_{\lambda_i}, \qquad L_{\lambda_i} = AQ_{\lambda_i}.$$

Cette transformation de rang fini $L = \sum_{i=1}^{n} L_{\lambda_i}$ est permutable à A, donc ρ est inférieur à la valeur de la première expression, et R_A est au plus égal à cette valeur, puisque A'_{λ_n} n'a pas de point singulier dans le disque de rayon ρ.

Montrons que R_A est au moins égal à la valeur de la seconde expression. Pour cela, supposons qu'il existe une transformation $L \in \mathfrak{L}$, telle que $A_1 = A - L$ n'ait que des points réguliers dans tout le

disque de centre o et de rayon ρ, et montrons que $\rho \leqslant R_A$. Pour $|\lambda| < \rho$, on a :

$$I - \lambda A = I - \lambda A_1 - \lambda L = (I - \lambda A_1)[I - \lambda(I - \lambda A_1)^{-1} L].$$

Le dernier facteur constitue une famille sur le disque de rayon ρ ouvert, qui satisfait aux conditions du théorème 4. 13., donc n'a que des points de Riesz dans ce disque; puisque tout point du disque est évidemment régulier ou point de Riesz pour A s'il l'est pour cette famille, on en déduit $\rho \leqslant R_A$.

La comparaison de ces deux résultats montre que les deux premières expressions sont bien égales à R_A.

Pour le démontrer dans le cas des deux autres expressions, il suffit de remarquer qu'elles se ramènent aux deux premières, grâce au théorème 3. 5.

5. 5. A. F. Ruston [1] et A. Grothendieck [1] ont étudié les transformations linéaires continues d'un espace de Banach dans lui-même qui ont une « *théorie de Fredholm* », c'est-à-dire auxquelles on peut généraliser la méthode d'étude de Fredholm pour les équations intégrales.

La comparaison entre le théorème précédent 5. 4. et un théorème de A. F. Ruston ([2], théorème 3. 1.) permet alors de remarquer que les *transformations linéaires continues de l'espace de Banach* E *dans lui-même qui ont un rayon de Fredholm infini sont exactement celles qui ont une théorie de Fredholm.* Ce sont aussi, comme le montre A.F. Ruston dans le même article, ce qu'il appelle les opérateurs de Riesz : pour tout nombre complexe λ, $\nu(I - \lambda A)$ et $\nu^*(I - \lambda A)$ sont finis, $\mu[(I - \lambda A)^n]$ est fini et $(I - \lambda A)^n(E)$ fermé; l'auteur de ce mémoire ajoute que les points singuliers sont supposés ne pas s'accumuler à distance finie, mais cette hypothèse est superflue, car c'est une conséquence des précédentes (d'après 4. 12., tous les points du plan étant des points de Riesz).

5. 6. Étant donnée une équation linéaire dans un espace de Banach, qui est de la forme :

$$x - \lambda A x = y,$$

où A est une transformation linéaire continue quelconque de E dans E, on peut chercher quelles sont les conditions dans lesquelles il est possible d'appliquer la seconde méthode de E. Schmidt [2]; celle-ci consiste, rappelons-le, à soustraire à A une transformation de rang fini L, de telle sorte que le « reste » (A — L) puisse être inversé

par la méthode de la série de Neumann; ceci revient évidemment à l'existence d'une transformation de rang fini L telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|(A - L)^n\|^{-1/n}$$

soit supérieur à $|\lambda|$. On a donc le corollaire :

COROLLAIRE. — *Le rayon de Fredholm de* A *est aussi le plus grand disque de centre* o *où se puisse appliquer la seconde méthode de E. Schmidt.*

Il faut remarquer que cette méthode a la propriété importante de fournir un calcul effectif de la solution de l'équation de seconde espèce écrite plus haut, supposé seulement que l'on ait un procédé qui permette de rechercher systématiquement une transformation de rang fini convenable. Dans le cas général où nous nous sommes placés, nous avons seulement reconnu l'existence d'une telle transformation. Si E est un espace de Hilbert ou un espace de Banach à base dénombrable, on peut facilement former un procédé convenable.

5. 7. Cherchons à caractériser les valeurs singulières et les « vecteurs principaux » (c'est-à-dire les vecteurs annulés par une puissance de $(I - \lambda A)$, ou bien encore les chaînons de $(I - \lambda A)$-chaînes) attachés à ces valeurs, dans le disque de Fredhlom de A.

Notons $x_A(\lambda)$ la fonction analytique de λ, à valeurs dans E, qui est définie par la somme de la série convergente $\sum_0^\infty \lambda^n A^n x$, lorsque $|\lambda|$ est assez petit, x étant un vecteur quelconque de E.

Cette série converge comme la série des normes, $\sum_0^\infty |\lambda|^n \|A^n x\|$, donc converge pour $|\lambda| \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \|A^n x\|^{-1/n}$ et diverge pour $|\lambda| \geqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \|A^n x\|^{-1/n}$. Nous poserons :

$$\rho_A(x) = \underline{\lim}_{n\to\infty} \|A^n x\|^{-1/n},$$

$$\rho_A = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{-1/n}.$$

Il est bien connu que cette dernière limite existe et donne le plus grand cercle de centre o inscrit dans l'ensemble résolvant de A, c'est-à-dire aussi le rayon de convergence de la série $\sum_0^\infty \lambda^n A^n$.

5. 8. LEMME. — *Soit* $x \in E$. *Si* $\rho_A(x) < R_A$, $\rho_A(x)$ *prend l'une des valeurs* $|\lambda_i|$, *les* λ_i *désignant les singularités de* A *dans son disque de Fredholm.*

Supposons que $\rho_A(x) < R_A$ pour un $x \in E$. Il existe alors certai-

nement une valeur λ_0, de module $\rho_A(x)$, où la fonction $x_A(\lambda)$ a une singularité. Mais, dans le disque de Fredholm, nous avons vu que A n'a que des points de Riesz ne s'accumulant pas à l'intérieur et des points réguliers; λ_0 ne peut être un point régulier de $(I - \lambda A)^{-1}$, sinon $x_A(\lambda)$ serait régulière aussi en λ_0. Ce point est donc nécessairement un des points singuliers λ_i, et $\rho_A(x) = |\lambda_0|$.

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* A *possède une singularité dans le disque de Fredholm est qu'il existe un* $x \in E$, *tel que* $\rho_A(x) < R_A$ (1).

Lorsqu'il existe un tel x, A *possède un point de Riesz singulier de module* $\rho_A(x)$.

En effet, si un tel x existe, le lemme précédent nous montre qu'il existe une singularité de A, de module $\rho_A(x) < R_A$; si une telle singularité λ_1, $|\lambda_1| < R_A$, existe, il existe aussi un x tel que $x = \lambda_1 A x$, donc pour lequel la série $\sum_0^\infty \lambda_1^n A^n x$ ne converge pas, si bien que

$$\rho_A(x) \leqslant |\lambda_1| < R_A.$$

5. 9. Soient λ_i les singularités de A dans le disque de Fredholm; appelons α_n les modules successifs distincts des λ_i :

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \cdots < R_A.$$

Pour chaque λ_i, soit Q_{λ_i} la projection (sur un sous-espace M_{λ_i}) qui réduit normalement A en λ_i. Posons $M(\alpha_n) = \sum_{|\lambda_i| = \alpha_n} M_{\lambda_i}$, et désignons par $N(\alpha_n)$ le supplémentaire topologique de $\sum_{r=1}^{n} M(\alpha_r)$ qui est défini par l'annulation de la projection $\sum_{\substack{|\lambda_i| = \alpha_n \\ 1 \leqslant r \leqslant n}} Q_{\lambda_i}$.

LEMME. — *Soit* λ_1 *un point singulier de Riesz de* A. *Si* $x \in M_{\lambda_1}$, *la série* $\sum_0^\infty \lambda_1^n A^n x$ *est divergente.*

Tout d'abord, si $x \in T_{\lambda_1}^{-1}(0)$, où $T_\lambda = I - \lambda A$, on a :

$$x = \lambda_1 A x = \cdots = \lambda_1^n A^n x,$$

donc la série $\sum_0^\infty \lambda_1^n A^n x$ est divergente.

---

(1) Un théorème analogue a été énoncé pour l'espace de Hilbert par A.T. Taldykin [1]. Il y emploie la quantité : lim sup $(\|A^n x\| / \|x\|)$.

Supposons maintenant que $x \in M_{\lambda_i}$ et qu'il existe un vecteur y (nécessairement de M_{λ_i}) tel que $T_{\lambda_i}x = y$, la série considérée divergeant pour y. Alors on ne peut avoir $\sum_0^\infty \lambda_i^n A^n x$ convergente, sinon

$$T_{\lambda_i}\left(\sum_0^\infty \lambda_i^n A^n x\right) = \sum_0^\infty \lambda_i^n A^n [T_{\lambda_i} x] = \sum_0^\infty \lambda_i^n A^n y$$

le serait aussi, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Le lemme résulte de ces deux remarques, puisque tout vecteur de M_{λ_i} est un chaînon d'une chaîne ayant son origine dans $\overset{-1}{T}_{\lambda_i}(0)$.

THÉORÈME. — *Soit* $x \in E$, $x \neq 0$. *Ou bien* $x \in N(\alpha_1)$, *et alors* $\rho_A(x) > \alpha_1$; *ou bien* $x \notin N(\alpha_1)$, *et alors* $\rho_A(x) = \alpha_1$. *De même, soit* $x \in N(\alpha_\nu)$, $x \neq 0$. *Ou bien* $x \in N(\alpha_{\nu+1})$ *et* $\rho_A(x) > \alpha_{\nu+1}$; *ou bien* $x \notin N(\alpha_{\nu+1})$, *et* $\rho_A(x) = \alpha_{\nu+1}$.

En effet, soit $x \in N(\alpha_1)$; posons $A' = A - \sum_{|\lambda_i| = \alpha_1} L_{\lambda_i}$. On a : $A^n x = A'^n x$, donc $x_{A'}(\lambda) = x_A(\lambda)$. Or, A' a pour plus petit module de ses singularités α_2. Par suite, d'après le lemme, $\rho_A(x) = \rho_{A'}(x) \geqslant \alpha_2 > \alpha_1$.

Supposons maintenant que $x \in M_{\lambda_i}$ pour un certain i, $|\lambda_i| = \alpha_1$. Alors $x_A(\lambda)$ est définie pour $|\lambda| < \alpha_1$, avec, d'après le lemme précédent, une série $\sum_0^\infty \lambda^n A^n x$ divergente pour $\lambda = \lambda_i$. Donc α_1 est exactement le rayon de convergence de cette série, et $\rho_A(x) = |\lambda_i| = \alpha_1$.

Si $x \in M(\alpha_1)$, x est la somme de plusieurs vecteurs x^i, dont l'un au moins n'est pas nul, avec $x^i \in M_{\lambda_i}$, et aussi $x_A(\lambda) = \sum_{|\lambda_i| = \alpha_1} x^i_A(\lambda)$. Or x^i appartient à l'intersection des sous-espaces $T^n_{\lambda_j}(E)$, n entier et $\lambda_j \neq \lambda_i$; donc $x^i_A(\lambda)$ est régulière en λ_j, $\lambda_j \neq \lambda_i$, et singulière en λ_i. Ainsi, $x_A(\lambda)$ est singulière en chacun des λ_i où $x^i \neq 0$. Pour $x \in M(\alpha_1)$, on a donc bien $\rho_A(x) = \alpha_1$.

Enfin, si plus généralement $x \notin N(\alpha_1)$, on a $x = x' + x''$, où $x' \in N(\alpha_1)$ et $0 \neq x'' \in M(\alpha_1)$, $x'_A(\lambda)$ est régulière pour $|\lambda| = \alpha_1$ et $x''_A(\lambda)$ singulière en certains points de module α_1. Comme $x_A(\lambda)$ est leur somme, on a bien $\rho_A(x) = \alpha_1$.

La deuxième partie du théorème s'en déduit aisément en considérant $N(\alpha_\nu)$ lui-même comme un espace de Banach.

5. 10. On peut se servir du théorème 5. 9., lorsqu'on a évalué le rayon de Fredholm de A, pour obtenir les modules successifs des valeurs singulières de A dans le disque de Fredholm. On calculera successivement :

a) $$\alpha_1 = \min_{x \in E} \rho_A(x) = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{-1/n};$$

si cette quantité est moindre que R_A, c'est le plus petit module des singularités de A dans son disque de Fredholm (et il existe de telles singularités). Si elle est égale à R_A, c'est qu'il n'existe pas de telles singularités.

Dans le premier cas, la condition $\rho_A(x) > \alpha_1$ détermine le sous-espace $N(\alpha_1)$. Le sous-espace $M(\alpha_1)$ peut être déterminé comme ensemble des vecteurs annulés par les formes linéaires contenues dans $N_*(\alpha_1)$, sous-espace de E^* déterminé comme $N(\alpha_1)$ par rapport à A', transposée de A.

b) $$\alpha_2 = \min_{x \in N(\alpha_1)} \rho_A(x) = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|_{N(\alpha_1)}^{-1/n}; \qquad \text{etc.}$$

Remarque. — *Du même théorème résulte aussi que: la condition nécessaire et suffisante pour que l'on obtienne une solution de l'équation*

$$(I - \lambda_0 A)x = y$$

lorsque λ_0 *est une singularité de* A *contenue dans son disque de Fredholm, en employant la série de Neumann appliquée à* y, *est que* y *satisfasse à la condition suivante:* $x'(y) = 0$ *pour toute forme linéaire continue* $x' \in E'$ *qui est vecteur principal pour l'une des transformations* $(I - \lambda A)'$ *avec* $|\lambda| \leqslant |\lambda_0|$.

Cette condition est plus restrictive que la condition d'existence d'une solution, exprimée (chapitre II) par la condition de Fredholm (N).

CHAPITRE VI

RÉDUCTION DE CERTAINES TRANSFORMATIONS EN TOUS LES POINTS D'UNE SUITE INFINIE

6. 1. Dans tout ce chapitre, E est un espace de Banach sur le corps des nombres complexes, A une transformation linéaire continue de E dans E. Dans chaque composante N_i de l'ensemble de Noether N de A, les points où il existe des chaînes finies forment un ensemble discret $\{\lambda_{ij}\}$. Au chapitre précédent (5. 1. et 5. 2.), nous avons associé à chaque point λ de N une projection Q_λ, identique à 0 pour $\lambda \neq \lambda_{ij}$; ces projections sont orthogonales deux à deux :

$$Q_\lambda Q_\mu = 0 \qquad \text{si} \qquad \lambda \neq \mu,$$

et permutables à A.

Si $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ est une suite finie de points de Noether de A, on peut définir une *réduction simultanée de* A *aux points* λ_i; en effet, prenons la réduite A_{λ_1} de A en λ_1, puis la réduite A'_{λ_2} de A_{λ_1} en λ_2, etc..., la réduite A'_{λ_n} de $A'_{\lambda_{n-1}}$ en λ_n; nous avons :

$$A = A'_{\lambda_n} + \sum_1^n L_{\lambda_i}, \qquad L_{\lambda_i} = AQ_{\lambda_i}.$$

La transformation A'_{λ_n} a le même ensemble de Noether N que A, avec les mêmes indices $\chi(\lambda)$ et $\mu(\lambda)$ et les mêmes sous-espaces de vecteurs principaux, sur tout N, sauf aux points λ_i qui sont sans chaînes finies pour A'_{λ_n}, même s'ils étaient à chaînes finies pour A.

Le problème que nous examinerons ici est le suivant : à quelles conditions peut-on réduire A simultanément aux points d'une suite infinie $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$?

Définitions.

6. 2. Soit B un ensemble quelconque dans E; nous conviendrons de l'appeler *f-compact* si toute suite de vecteurs de B contient une sous-suite faiblement convergente vers un vecteur de E (c'est ce que des auteurs écrivant en anglais ont appelé « sequentially weackly compact », voir par exemple E. Hille [1]). Nous dirons que l'espace E lui-même est un espace *lf-compact* si tout ensemble borné de E est *f*-compact, c'est-à-dire si la boule $||x|| \leqslant 1$ est un ensemble compact.

Enfin, nous appelerons *transformation f-compacte* toute transformation T de E dans E qui donne de la boule unité $||x|| \leqslant 1$ une image *f*-compacte, l'espace E étant un espace de Banach quelconque.

Un espace *lf*-compact est visiblement faiblement complet, et tout espace de Banach réflexif est *lf*-compact (B. J. Pettis [1]).

Par exemple, les espaces L^p, $p \geqslant 1$, et l^p, $p \geqslant 1$, sont faiblement complets; L^p, $p \geqslant 1$, sont *lf*-compacts; L^p, $p > 1$, sont réflexifs (S. Banach [1]).

Suites de projections.

6. 3. Soit P une projection définie dans E. Les deux sous-espaces $\overset{-1}{P}(0)$ et P(E) sont supplémentaires. Ils sont supplémentaires topologiques dans E si et seulement si P est continue; rappelons que, puisque E est un espace métrisable et complet, il suffit que $\overset{-1}{P}(0)$ et P(E) soient fermés dans E pour qu'il en soit ainsi (voir par exemple N. Bourbaki [1], p. 37). Les vecteurs de P(E) sont les vecteurs de E invariants par P.

Nous noterons $P \prec Q$ *la relation entre projections* définies dans E qui équivaut à :

$$P(E) \supset Q(E) \qquad \text{et} \qquad \overset{-1}{P}(0) \subset \overset{-1}{Q}(0).$$

C'est une relation d'ordre puisque :

a) $P \prec P$.

b) ($P \prec Q$ et $Q \prec P$) implique $P = Q$.

c) ($P \prec Q$ et $Q \prec R$) implique $P \prec R$.

Lorsque P, Q, P + Q sont des projections, on a visiblement $P \prec P + Q$ et $Q \prec P + Q$; rappelons que si P et Q sont des pro-

jections, pour que $P + Q$ en soit une, il faut et il suffit que P et Q soient « *orthogonales* », c'est-à-dire que $PQ = QP = 0$.

Enfin, nous dirons qu'*une suite* $\{P_n\}$ *de projections* définies dans E *est non décroissante* lorsque $P_n \prec P_{n+1}$ pour chaque n. D'après la remarque précédente, si les Q_i sont des projections orthogonales deux à deux, les sommes partielles $\sum_{i=1}^{n} Q_i$ de la série ΣQ_i forment une suite non décroissante de projections.

(Il n'est pas utile dans ce qui suivra de considérer les suites non-croissantes, car si $\{P_n\}$ est une suite non-croissante de projections, $\{(I - P_n)\}$ est une suite non-décroissante et il suffit de lui appliquer les propositions que nous posséderons pour ce dernier cas).

6. 4. Démontrons, pour les suites monotones de projections dans les espaces *lf*-compacts, une proposition analogue à celle qu'a démontrée E.R. Lorch [1] pour les espaces réflexifs.

Nous nous servirons du lemme suivant, valable même si E n'est pas *lf*-compact :

Lemme. — *Soit* $\{P_n\}$ *une suite non-décroissante de projections à normes bornées;* N *et* M *désignant respectivement l'intersection des noyaux* $P_n^{-1}(0)$ *et le plus petit sous-espace fermé contenant les images* $P_n(E)$, N *et* M *ont pour seul vecteur commun* 0 *et* $M \oplus N$ *est fermée.*

Soit k une borne des $\|P_n\|$; soient $x \in M$ et $y \in N$. Il existe une suite de vecteurs x_n, $x_n \in P_n(E)$, tendant vers x. L'inégalité :

$$\|x_n\| = \|P_n(x_n + y)\| \leqslant k\,\|x_n + y\|$$

entraîne

$$\|x\| \leqslant k\,\|x + y\|. \tag{1}$$

Ainsi, si $x \in M \cap N$, on a $-x \in N$, donc $\|x\| \leqslant k\,\|x - x\|$, ce qui entraîne $x = 0$.

Supposons maintenant qu'une suite $\{x_n + y_n\}$, où $x_n \in M$ et $y_n \in N$, soit convergente. Alors :

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant k\,\|(x_{n+p} + y_{n+p}) - (x_n + y_n)\|;$$

donc la suite $\{x_n\}$ converge aussi (ainsi que la suite $\{y_n\}$). M et N sont fermés dans E, M par définition et N comme intersection de sous-espaces fermés. Par conséquent, x_n tend vers un vecteur $x_0 \in M$ et y_n vers un vecteur $y_0 \in N$. Ainsi, toute suite de vecteurs de $M \oplus N$ qui est une suite de Cauchy converge vers un vecteur de $M \oplus N$, ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME. — *Soit* E *un espace de Banach lf-compact,* $\{P_n\}$ *une suite non-décroissante de projections bornées en norme,* M *le plus petit sous-espace fermé contenant les* $P_n(E)$, N *l'intersection des* $\overset{-1}{P}_n(0)$.

Alors, on a $E = M \oplus N$ *et* P_n *converge fortement vers la projection* P *de* E *sur* M *parallèlement à* N.

Soit k une borne des $\|P_n\|$.

Soit $x \in E$; posons $x_n = P_n x$. Les $\|x_n\|$ sont bornées par $k\|x\|$, donc il existe une suite ν_i de nombres entiers telle que x_{ν_i} converge faiblement vers un vecteur x', lequel appartient nécessairement à M. Alors, la suite $\{P_n x'\}$ elle-même converge fortement vers x', car on a

$$\|x' - P_n x'\| \leqslant \|x' - x'_n\| + \|x'_n - P_n x'_n\| + \|P_n x'_n - P_n x'\| \leqslant (1 + k)\|x' - x'_n\|$$

pour toute suite $x'_n \in P_n(E)$ et convergeant vers x'.

Remarquons alors que $(I - P_{\nu_i})x = x - x_{\nu_i} = x''_{\nu_i}$ est aussi faiblement convergente vers $x'' = x - x'$. Comme $x''_{\nu_i} \in \overset{-1}{P}_{\nu_i}(0)$, $P_n x''_{\nu_i} = 0$ si $n \leqslant \nu_i$. Mais si x''_{ν_i} tend faiblement vers x'', $P_n x''_{\nu_i}$ tend aussi faiblement vers $P_n x''$, donc $P_n x'' = 0$ pour chaque n. Il en résulte que l'on a $x'' \in \overset{-1}{P}_n(0)$ pour tout n, donc $x'' \in N$.

Finalement, chaque $x \in E$ est bien de la forme : $x = x' + x''$, $x' \in M$ et $x'' \in N$; on a donc $E = M \oplus N$ d'après le lemme, et $P_n x = P_n x'$ tend vers x'; donc P_n est bien fortement convergente vers la projection P définie par $Px = x'$ pour tout $x \in E$. Évidemment, on a $\|P\| \leqslant k$.

Séries de projections orthogonales.

6. 5. Le théorème précédent s'applique en particulier aux sommes partielles d'une série de projections orthogonales deux à deux :

Soit E *un espace de Banach lf-compact,* $\{Q_i\}$ *une suite de projections orthogonales deux à deux, et telles que les normes* $\left\|\sum_1^n Q_i\right\|$ *soient bornées; alors la série* $\sum_1^\infty Q_n$ *est fortement convergente vers une projection* Q.

Lorsque E est simplement un espace faiblement complet, on sait d'après un théorème d'Orlicz [1] que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une série $\sum_1^\infty x_n$ soit commutativement convergente est que $\left\|\sum_{i=1}^n x_{\nu_i}\right\| \leqslant k$ pour tout ensemble fini d'indices $\{\nu_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$. On a donc aussi :

Soit E *un espace de Banach faiblement complet,* $\{Q_i\}$ *une suite de pro-*

jections orthogonales deux à deux, et telle qu'il existe un nombre k pour lequel $\left\|\sum_{i=1}^{n} Q_{\nu_i}\right\| \leqslant k$ *quel que soit l'ensemble fini d'indices* $\{\nu_i\}$; *alors la série* $\sum_1^\infty Q_n$ *est fortement et commutativement convergente vers une projection* Q.

En effet, pour chaque $x \in E$, on a $\left\|\sum_1^n Q_{\nu_i} x\right\| \leqslant k\|x\|$ quel que soit l'ensemble fini d'indices $\{\nu_i\}$. Donc la série $\sum_1^\infty Q_n x$ est commutativement convergente pour chaque $x \in E$, ce qui exprime que $\sum_1^\infty Q_n$ est fortement convergente.

Soit Q sa limite; comme limite forte de transformations linéaires continues, elle est encore linéaire et continue, et l'on vérifie facilement que $Q^2 = Q$, donc Q est une projection.

N. Dunford [3] a fait une étude plus générale des familles de projections permutables dans le cas de l'espace faiblement complet.

Suites P-bornées de points de Noether.

6. 6. Soit A une transformation linéaire continue de E dans E, N son ensemble de Noether. *A chaque point* λ *de* N, *associons une projection* Q_λ *qui réduise* A *en* λ, différente de o seulement si $(1 - \lambda A)$ a des chaînes finies, et posons $L_\lambda = AQ_\lambda$.

Soit $S = \{\lambda_n\}$ une suite quelconque de points de N; nous dirons que la suite Q_{λ_n} *est* P-*semi-bornée* lorsque les projections $\sum_1^n Q_{\lambda_i}$ sont à normes bornées. Nous dirons de même que la suite est P-*bornée* lorsque toutes les projections $\sum_1^n Q_{\lambda_{\nu_i}}$ sont à normes bornées, pour un ensemble d'indices quelconque $\{\nu_i\}$ fini.

Quand il s'agit seulement de points de Riesz, et qu'on utilise les projections Q_{λ_n} qui réduisent normalement A, la condition d'être P-bornée ne dépend que de l'ensemble des points λ_n de S; il est clair que cette condition est alors en réalité une condition sur A et sur l'ensemble des points de S. Nous dirons que la suite $\{\lambda_n\}$ est P-bornée ou P-semi-bornée; on verrait facilement que, dans ce cas particulier, elle se ramène à une condition sur les normes des « résidus » de A dans certains ensembles, au sens de la terminologie de N. Dunford ([1] et [3]).

6. 7. Théorème. — *Soit* E *un espace de Banach lf-compact,* A *une transformation linéaire continue de* E *dans* E, $\{\lambda_n\}$ *une suite de points de Noether de* A, Q_{λ_n} *une projection réduisant* A *en* λ_n. *Si la suite* $\{Q_{\lambda_n}\}$ *est* P-*semi-bornée:*

1° E *est la somme directe de deux sous-espaces fermés* M *et* N.

2° $\sum_1^\infty Q_{\lambda_n}$ *converge fortement vers la projection* Q *de* E *sur* M *suivant* N.

3° $A = A' + \sum_1^\infty L_{\lambda_n}$, *la série convergeant fortement;* $A' = A(I - Q)$ *a pour ensemble de Noether l'ensemble de Noether de* A, *avec les mêmes vecteurs principaux en tous les points autres que les* λ_n, *et avec seulement des chaînes infinies en ces points.*

En effet, les sommes partielles de la série $\sum_1^\infty Q_{\lambda_n}$ forment par hypothèse une suite non-décroissante et à normes bornées. M désignant le plus petit sous-espace fermé contenant toutes les images qu'elles donnent de E, N l'intersection de tous leurs noyaux, on a bien 1° et 2°, d'après le théorème 6. 4. Enfin, si L désigne la transformation AQ, on a, comme pour la réduction de A en un seul point (5. 2.) :

$$(I - \lambda A)^n = (I - \lambda A')^n (I - \lambda L)^n = (I - \lambda L)^n (I - \lambda A')^n$$

l'orthogonalité de Q et $(I - Q)$ entraînant celle de L et A', puisque Q est permutable avec A.

Corollaire. — *Soit* E *un espace de Banach lf-compact,* A *une transformation linéaire continue de rayon de Fredholm infini,* $\{\lambda_n\}$ *la suite de ses points singuliers,* Q_{λ_n} *la projection qui réduit normalement* A *en* λ_n.

Si $\{\lambda_n\}$ *est* P-*semi-bornée, la série* $\sum_1^\infty L_{\lambda_n}$, $L_{\lambda_n} = AQ_{\lambda_n}$, *est fortement convergente, et le « reste »* $A' = A - \sum_1^\infty L_{\lambda_n}$ *est sans point singulier à distance finie.*

6. 8. Théorème. — *Soit* E *un espace de Banach faiblement complet,* A *une transformation linéaire continue de* E *dans* E, $\{\lambda_n\}$ *une suite de points de Noether de* A, Q_{λ_n} *une projection réduisant* A *en* λ_n.

Si la suite $\{Q_{\lambda_n}\}$ *est* P-*bornée, les conclusions de* 6. 7. *restent valables, les séries convergeant de plus commutativement.*

En effet, dans ce cas, la série $\sum_0^\infty Q_{\lambda_n}$ a pour termes des projections orthogonales deux à deux, et les sommes partielles quelconques de

termes de cette série sont bornées en norme. Elle converge donc fortement et commutativement.

Il est clair que l'on peut tirer encore de ce théorème une condition pour développer une transformation à rayon de Fredholm infini en série de transformations de rang fini orthogonales, le « reste » étant sans point singulier à distance finie, comme on l'a fait au paragraphe précédent.

6. 9. 1) Un espace de Hilbert est à la fois faiblement complet et *lf*-compact. Si l'on applique les deux théorèmes précédents à des points de Riesz de la transformation A, supposée symétrique, les réductions normales seront obtenues par des projections Q_{λ_n} symétriques aussi; ce sont alors des projections *orthogonales*, ainsi que toutes leurs sommes finies, donc celles-ci sont bornées en norme par 1 : *toute suite de points de Riesz d'une transformation symétrique est* P-*bornée*. Lorsque A est à rayon de Fredholm infini (il est alors facile de voir que A est compacte) on retrouve le théorème de développement de Hilbert-Schmidt : le « reste » A′ est 0 puisque symétrique et sans point singulier à distance finie.

2) Comme pour le cas symétrique, on peut utiliser les deux théorèmes précédents pour simplifier l'étude de l'équation *de première espèce* :

$$Ax = y,$$

en étudiant les équations correspondant à Qy et $(I - Q)y$.

Transformations *f*-compactes.

6. 10. Théorème. — *Soit* E *un espace de Banach quelconque,* A *une transformation f-compacte définie dans* E, $\{\lambda_n\}$ *une suite de points de Noether de* A, Q_{λ_n} *une projection qui réduit* A *en* λ_n. *Si la suite* $\{Q_{\lambda_n}\}$ *est* P-*semi-bornée, et si* $L_{\lambda_n} = AQ_{\lambda_n}$, *la conclusion* 3° *de* 6. 7. *reste valable.*

Posons $P_n = \sum_1^n Q_{\lambda_i}$; appelons encore M et N respectivement le plus petit sous-espace fermé contenant les images $P_n(E)$ et l'intersection des noyaux $\overset{-1}{P_n}(0)$.

Soit $x \in E$ et $y = Ax$. La suite $P_n x$ est bornée par $k\|x\|$ si k est une borne des $\|P_n\|$; donc il existe des indices ν_i tels que $AP_{\nu_i}x$ converge faiblement vers un vecteur y'; il en résulte qu'il existe une suite de vecteurs de M tendant fortement vers ce même y', donc $y' \in M$, et les $P_n y'$ convergent fortement vers y'.

Posons $y'' = y - y'$. Les $y''_{\nu_i} = A(I - P_{\nu_i})x$ tendent faiblement vers y''. Mais $y''_{\nu_i} = y - AP_{\nu_i}x \in N_{\nu_i}$, car $y''_{\nu_i} = A(x - P_{\nu_i}x)$. Donc $P_n y''_{\nu_i} = 0$ si $\nu_i \geqslant n$. Comme les y''_{ν_i} tendent faiblement vers y'', ceci entraîne $P_n y'' = 0$ pour chaque n. Donc $y'' \in N$.

Puisque $Ax = y' + y''$, $AP_n x = P_n Ax = P_n y'$ converge fortement, vers y'. On a donc $y' = \sum_1^\infty AQ_{\lambda_n} x = \sum_1^\infty L_{\lambda_n} x$, la série convergeant en norme pour chaque x. Il ne reste plus qu'à poser $A'x = y''$ pour chaque $x \in E$. Ici, on est assuré que A' annule tous les éléments de M et applique N dans lui-même, ce qui suffit pour la conclusion 3° mais n'implique pas que le sous-espace fermé $M \oplus N$ soit identique à E, ni même possède un supplémentaire topologique dans E.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F.V. Atkinson *Math. Sbornik, N.S.*, 28, 70 (1951), 3-14.
[2] F.V. Atkinson. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 3. (1952), 53-60.
[1] M. Audin. *C. R.* Paris, 237 (1953), 511-512.
[2] M. Audin. *C. R.* Paris, 238 (1954), 2221-2222.
[3] M. Audin. *C. R.* Paris, 240 (1955), 832-835.
[4] M. Audin. *C. R.* Paris, 241 (1955), 1197-1198.
[5] M. Audin. *C. R.* Paris, 244 (1957), 711-713.
[6] M. Audin. *C. R.* Paris, 244 (1957), 2880-2882.
[1] S. Banach. *Théorie des opérations linéaires*, Varsovie, 1932.
[1] N. Bourbaki. *Espaces vectoriels topologiques*, I-II, Paris 1953.
[2] N. Bourbaki. *Espaces vectoriels topologiqes*, III-IV, Paris, 1955.
[3] N. Bourbaki. *Espaces vectoriels topologiques*, R., Paris 1955.
[1] J. Dieudonné. *Bull. Sci. Math.*, 2, 67 (1943), 72-84.
[2] J. Dieudonné. *Bull. de la S.M.F.*, LXX (1943), 46-75.
[1] N. Dunford. *Bull. of the A.M.S.*, 49 (1943), 637-651.
[2] N. Dunford. *Trans. of the A.M.S.*, 54 (1943), 185-217.
[3] N. Dunford. *Pacific J. of Math.* 2 (1952), 559-614.
[1] S. Fenyö.
[1] I.C. Gohberg. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR.*, 76 (1951), 477-480.
[2] I.C. Gohberg. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR.*, 76 (1951), 9-12.
[3] I.C. Gohberg. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR.*, 78 (1951), 629-632.
[1] A. Grothendieck. *Bull. de la S.M.F.* 84 (1956), 319-384.
[1] E. Hille. *Functional Analysis and semi-groups, Trans. of the A.M.S.*
[1] G. Köthe. *Portugaliae Math.* 13, 3 (1954), 97-104.
[1] S.N. Krackovskii et M.A. Gol'dman. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 86 (1952), 15-17.
[1] J. Leray. *Acta Acad. Sci. Szeged*, vol. F. Riesz.

[1] E.R. LORCH. *Trans. of the A.M.S.* 45 (1939), 217-234.
[1] N.I. MUSKHELISHVILI. *Singular integral equations*, 1946, *Noordhoff-Groningen*, Holland, 1953.
[1] S.N. NIKOLSKII. *Izvestiya Akad. Nauk. SSSR.*, 7 (1943), 147-166.
[1] F. NOETHER. *Math. Annalen*, 82 (1921), 42-63.
[1] ORLICZ. *Studia Math.* I (1929), 241-255.
[1] B.J. PETTIS. *Bull. of the A.M.S.*, 44 (1938).
[1] F. RIESZ. — *Acta Math.*, 41 (1916), 71-98.
[2] F. RIESZ et B. SZ-NAGY. *Leçons d'Analyse fonctionnelle*, Budapest, 1952.
[1] A.F. RUSTON. *Proceedings of the L.M.S.*, III, 11 (1953), 368-377.
[2] A.F. RUSTON. *Journal of the L.M.S.*, 29, 3 (1954), 318-325.
[1] E. SCHMIDT. *Math. Annalen*, 64 (1907), 161-174.
[1] L. SCHWARTZ. *C. R.* Paris, 236 (1953), 2472-2473.
[1] A.T. TALDYKIN. *Mat. Sbornik*, 34, 76 (1954), 201-212.
[1] J.H. WILLIAMSON. *Journal of the L.M.S.*, 29 (1954), 149-156.

ERRATUM

A LA THÈSE DE MAURICE AUDIN.

Le manuscrit laissé par M. Audin n'était pas une rédaction définitive. Nous avons laissé son texte tel quel, et nous y ajoutons le présent erratum.

PROPOSITION 1. 8, *page* 12.

Cette proposition est inexacte, si l'on ne fait pas une hypothèse supplémentaire; on a $T(E_1) \subset E_1$, mais non nécessairement $T(E_1) = E_1$ (ligne 12). Si $e_1 \in T^{-1}(0) \cap E_1$, e_1 est l'origine de suites

$$(e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots e_n), \qquad T(e_j) = e_{j-1},$$

arbitrairement longues, mais peut-être pas d'une seule suite ou chaîne infinie.

La proposition devient exacte dans l'une ou l'autre des hypothèses $\mu(T) < \infty$, $\nu^*(T) < \infty$.

a) Soit $\mu(T) < \infty$. Alors $\mu(T^n) < \infty$ pour tout n. Pour n fixé, les espaces $T^{-n}(0) \cap T^m(E)$, $m = 1, 2, \ldots$, forment une suite décroissante d'espaces de dimensions finies, donc stationnaire; il existe m_n tel que $T^{-n}(0) \cap E_1 = T^{-n}(0) \cap T^m(E)$ pour $m \geqslant m_n$. Si $e_n \in T^{-n}(0) \cap E_1$ qu'on écrira $T^{-n}(0) \cap T^m(E)$, $m = \sup\ (m_n,\ m_{n+1} + 1)$, on a $e_n = T(e_{n+1})$, $e_{n+1} \in T^{m-1}(E)$, mais aussi nécessairement $e_{n+1} \in T^{-(n+1)}(0)$, donc $e_{n+1} \in T^{-(n+1)}(0) \cap T^{m-1}(E) = T^{-(n+1)}(0) \cap E_1$. Ainsi, à partir de $e_1 \in T^{-1}(0) \cap E_1$, on forme une chaîne infinie, avec $e_n \in T^{-n}(0) \cap E_1$.

b) $\nu^*(T) < \infty$. Alors $E_1 = T^m(E)$ pour $m \geqslant v^*(T)$, et on a bien $T(E_1) = E_1$.

THÉORÈME 1. 10, *page* 13.

Ajouter à l'énoncé : si $\mu(T)$ ou $\nu^*(T)$ est fini.

THÉORÈME 2. 20, *page* 28.

L'énoncé est exact, mais la démonstration inexacte, puisque l'on

n'a pas nécessairement $T(E_1) = E_1$ (voir ce qui précède). Mais nous avons vu, dans la rectification de la page précédente, que $T(T^{-n}(0) \cap E_1) = T^{-(n-1)}(0) \cap E_1$, donc $\omega(T^n) = \omega(T^{n-1}) + \omega(T)$, ce qui donne, par récurrence, $\omega(T^n) = n\omega(T)$, et on peut poursuivre la démonstration sans autre modification.

THÉORÈME 3. 11, *page* 36.

On doit supposer U d'indice fini (sans quoi, même pour $L = 0$, $T = U$ n'est pas d'indice fini).

LEMME A, *page* 40.

Il est bien exact que, moyennant la condition C, pour tout voisinage V de 0 dans E, on peut en trouver un autre W et un voisinage u de λ_0 dans Λ, tels que $T_\lambda(V) \supset W \cap T_\lambda(E)$ pour $\lambda \in u$; mais comme le voisinage u va varier avec le voisinage donné V, cela ne prouve nullement que T soit un isomorphisme de E sur $T_\lambda(E)$, ni même soit biunivoque, pour aucune valeur λ voisine de λ_0.

Le lemme A est exact si E est un espace de Banach.

La démonstration du lemme C paraît s'appuyer sur le lemme A (page 43, ligne 11); il n'en est rien, et le lemme C est donc exact, car l'expression explicite de U_λ^{-1} permet directement de voir que U_λ est un isomorphisme.

Par ailleurs, à la place de C, on peut introduire la condition plus forte C' :

(C') : *Il existe un voisinage u_0 de λ_0 dans Λ, un voisinage de* 0, V_0, *dans* E, *et une partie bornée* B_0 *de* E *tels que* $(T_\lambda - T_{\lambda_0})(V_0) \subset B_0$ *pour* $\lambda \in u_0$, *et que* $T_\lambda - T_{\lambda_0}$ *converge vers* 0 *uniformément sur* V_0 *quand* λ *tend vers* λ_0.

Alors, si l'on a C', *et si* T_{λ_0} *est un isomorphisme de* E *sur* $T_{\lambda_0}(E)$, T_λ *est biunivoque pour* λ *assez voisin* de λ_0.

Démontrons-le. On peut toujours supposer V_0 disqué. Si notre affirmation est en défaut, on pourra, pour tout voisinage u de λ_0, trouver $x_u \in E$, $\lambda_u \in u$, tel que $T_{\lambda_u}(x_u) = 0$. La droite engendrée par x_u ne peut pas être tout entière dans V_0; car son image par T_{λ_u} serait alors nulle, mais son image par $T_{\lambda_u} - T_{\lambda_0}$ est dans B_0 donc aussi nulle, donc son image par $T\lambda_0$ devrait être nulle, or T_{λ_0} est biunivoque. Il existe donc un homothétique y_u de x_u qui est dans V_0 et n'est pas dans $\frac{1}{2}V_0$. Comme $T_\lambda - T_{\lambda_0}$ converge uniformément vers 0 sur V_0 quand λ tend vers λ_0, $(T_{\lambda_u} - T_{\lambda_0})\, y_u$ va tendre vers 0

suivant l'ordonné filtrant des u; comme $T_{\lambda_u}(y_u) = 0$, $T_{\lambda_0}(y_u)$ va aussi tendre vers 0; comme T_{λ_0} est un isomorphisme de E sur $T_{\lambda_0}(E)$, y_u doit tendre vers 0, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $y_u \notin \frac{1}{2} V_0$. Donc notre affirmation est bien exacte.

LEMME 4. 5. *page* 45.

Ajouter à l'énoncé : si le rang de L_λ est indépendant de λ. La démonstration le suppose implicitement puisqu'elle considère les $x_{i\lambda}$ comme indépendants.

LEMME 4. 6, *page* 46.

Idem.

La proposition 4. 8, page 47, est exacte, bien qu'elle s'appuie sur le lemme 4. 6; car on voit aussitôt que $V_\lambda L$ est de rang constant, pour λ voisin de λ_0 ($V_\lambda^{-1}(0) \cap L(E) = V_{\lambda_0}^{-1}(0) \cap L(E) = 0$; donc le rang est celui de L).

PROPOSITION 4. 9, *page* 48.

Cette proposition a pour but d'étendre un théorème de Kraskovski et Goldman, cité dans la bibliographie. Elle a sans doute été ajoutée au manuscrit relativement tard, et sous forme d'esquisse provisoire. Telle quelle, elle est inexacte (contre-exemple : si T_λ est indépendante de λ, $T_\lambda = T$, N-transformation ayant des chaînes finies, alors T_λ est s-dérivable, et on a C et $\overline{O}$; N est tout le plan complexe, ainsi que 0, dont l'ensemble discret complémentaire est donc vide; mais pour tout λ il y a des chaînes finies). Alors que dans tout le reste de l'ouvrage la rédaction est claire, elle est ici très obscure, le milieu et la fin de la page 49 sont peu compréhensibles. Il est difficile de savoir quelles sont les hypothèses les moins restrictives possible, dans le cadre des idées générales de ce mémoire, qu'il faut ajouter pour avoir les conclusions désirées.

THÉORÈME 4. 12, *page* 51.

Inexact, comme ce qui précède.

COROLLAIRE, *page* 51.

Au lieu de 4. 7, 8, 9. lire 4. 7, 8.

THÉORÈME 4. 13, *page* 51.

Inexact (s'appuie sur le lemme A, page 40). Exact si E est un espace de Banach. Par ailleurs, si l'on suppose non seulement C,

mais C′ (voir erratum relatif au lemme A), alors la conclusion du théorème 4. 13 devient valable. Car si $T_{\lambda_0} - L$ est inversible à gauche ou à droite, c'est un isomorphisme puisqu'il n'y a que des points de Riesz; alors, en vertu de C′, on sait que $T_\lambda - L$ est biunivoque pour λ voisin de λ_0, donc pour la même raison c'est aussi un isomorphisme, on a donc bien $\overline{O}$.

THÉORÈME 4. 14, *page* 51.

Idem.

COROLLAIRE, *page* 52.

Ce corollaire est exact (on a C′, donc on peut appliquer le théorème précédent).

Pages 52-53.

Les indications *a*) et *c*) sont pour la plus grande partie inexactes, *b*) est exacte.

Page 55.

Les considérations relatives aux chaînes, lignes 6 et 8, sont inexactes.

Page 56.

Le fait que le disque de Fredholm ne contienne que des points de Riesz est démontré ici par la proposition 4. 9, qui est inexacte; mais si E est un espace de Banach (ce qui sera supposé dans tout le reste du chapitre) cela résulte du théorème de Krackovski-Goldman déjà cité. Tout ce qui suit est donc exact en vertu de ce théorème.

Page 64.

f-compact est équivalent à faiblement relativement compact, d'après un théorème de Smulian (Ueber lineare topologische Räume, *Mat. Sbornik*, N.S., t. 7 (1941), p. 425-448). Alors *lf*-compact est équivalent à faiblement quasi-complet ou réflexif.

Le mot faiblement complet dans tout le chapitre doit être remplacé par faiblement quasi-complet. Aux lignes 14-15, remplacer partout $p \geqslant 1$ par $p > 1$.

Le sixième chapitre retrouve et exprime donc d'une autre manière les résultats de Lorch.

L. SCHWARTZ.

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris.
membre du jury de la Thèse.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I. — QUELQUES PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES.

Indice d'une transformation linéaire 5
Propriété logarithmique de l'indice 6
Invariance de l'indice 8
Vecteurs principaux 10
Transformations de type fini 11
T-chaînes 15

CHAPITRE II. — ÉTUDE DE LA CONDITION DE RÉSOLUBILITÉ DE FREDHOLM.

Définitions et notations 16
Exemples 16
Topologie $\sigma(G)$ 17
Intersections de G-hyperplans 20
G-transposée d'une transformation 21
Condition de Fredholm 23
Transformations binormales 27
Homomorphismes binormaux 27
T-chaînes d'une transformation binormale 29

CHAPITRE III. — N-TRANSFORMATIONS.

Définitions et notations 29
Réduction du noyau de T aux origines de chaînes infinies 31
Réduction du noyau de T à (o) 32
Cas d'un espace vectoriel topologique 34
Autre propriété d'invariance de l'indice 37
Applications des théorèmes de décomposition 38

CHAPITRE IV. — ENSEMBLES DE NOETHER DE CERTAINES FAMILLES DE TRANSFORMATIONS.

Familles de transformations satisfaisant à (o) ou (*c*) 40
Familles de transformations de rang fini 45
Ensembles de Noether 46
Application à des familles d'un espace de Banach 50
Application au cas où T_λ ne diffère d'un isomorphisme que par une transformation compacte; problème d'Atkinson 51
Application aux transformations bornées 52

CHAPITRE V. — POINTS DE RIESZ ET RAYON DE FREDHOLM.

Réductions d'une transformation 55
Disque de Fredholm 56

CHAPITRE VI. — RÉDUCTION DE CERTAINES TRANSFORMATIONS EN TOUS LES POINTS D'UNE SUITE INFINIE.

Définitions 64
Suites de projections 64
Séries de projections orthogonales 66
Suites P-bornées de points de Noether 67
Transformations *f*-compactes 69

BIBLIOGRAPHIE 70
TABLE DES MATIÈRES 76